

ÁLGEBRA LINEAR

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA



Ministério da Educação - MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento
de Pessoal de Nível Superior
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Ceará

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Aberta do Brasil
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Diretoria de Educação a Distância

Licenciatura em Matemática

Álgebra Linear

Francisco Gêvane Muniz Cunha
Jânio Kléo Sousa Castro

Fortaleza, CE
2010

CRÉDITOS

Presidente

Luiz Inácio Lula da Silva

Ministro da Educação

Fernando Haddad

Secretário da SEED

Carlos Eduardo Bielschowsky

Diretor de Educação a Distância

Celso Costa

Reitor do IFCE

Cláudio Ricardo Gomes de Lima

Pró-Reitor de Ensino

Gilmar Lopes Ribeiro

Diretora de EAD/IFCE e Coordenadora UAB/IFCE

Cassandra Ribeiro Joye

Vice-Cordenadora UAB

Régia Talina Silva Araújo

Coordenador do Curso de Tecnologia em Hotelaria

José Solon Sales e Silva

Coordenador do Curso de

Licenciatura em Matemática

Zelalber Gondim Guimarães

Elaboração do conteúdo

Francisco Gêvane Muniz

Jânio Kléo Sousa Castro

Colaboradores

Lívia Maria de Lima Santiago

Marília Maia Moreira

Equipe Pedagógica e Design Instrucional

Ana Cláudia Uchôa Araújo

Andréa Maria Rocha Rodrigues

Carla Anaíle Moreira de Oliveira

Cristiane Borges Braga

Eliana Moreira de Oliveira

Gina Maria Porto de Aguiar Vieira

Giselle Santiago Cabral Raulino

Glória Monteiro Macedo

Iraci Moraes Schmidlin

Jane Fontes Guedes

Karine Nascimento Portela

Lívia Maria de Lima Santiago

Lourdes Losane Rocha de Sousa

Luciana Andrade Rodrigues

Maria Irene Silva de Moura

Maria Vanda Silvino da Silva

Marília Maia Moreira

Saskia Natália Brígido Bastista

Equipe Arte, Criação e Produção Visual

Ábner Di Cavalcanti Medeiros

Benghson da Silveira Dantas

Davi Jucimon Monteiro

Diemano Bruno Lima Nóbrega

Germano José Barros Pinheiro

Gilvandenys Leite Sales Júnior

José Albério Beserra

José Stelio Sampaio Bastos Neto

Larissa Miranda Cunha

Marco Augusto M. Oliveira Júnior

Navar de Medeiros Mendonça e Nascimento

Roland Gabriel Nogueira Molina

Samuel da Silva Bezerra

Equipe Web

Aline Mariana Bispo de Lima

Benghson da Silveira Dantas

Fabrice Marc Joye

Igor Flávio Simões de Sousa

Luiz Bezerra de Andrade Filho

Lucas do Amaral Saboya

Ricardo Werlang

Samantha Onofre Lóssio

Tibério Bezerra Soares

Thuan Saraiva Nabuco

Samuel Lima de Mesquita

Revisão Textual

Aurea Suely Zavam

Nukácia Meyre Araújo de Almeida

Revisão Web

Antônio Carlos Marques Júnior

Débora Liberato Arruda Hissa

Saulo Garcia

Logística

Francisco Roberto Dias de Aguiar

Virgínia Ferreira Moreira

Secretários

Breno Giovanni Silva Araújo

Francisca Venâncio da Silva

Auxiliar

Ana Paula Gomes Correia

Bernardo Matias de Carvalho

Isabella Britto

Maria Tatiana Gomes da Silva

Raíssa Miranda de Abreu Cunha

Wagner Souto Fernandes

Zuila Sâmea Vieira de Araújo

Catálogo na Fonte: Islânia Fernandes Araújo (CRB 3 - Nº 917)

C 972a

Cunha, Francisco Gêvane Muniz

Álgebra Linear / Francisco Gêvane Muniz Cunha , Jânio Kléo Sousa
de Castro - Fortaleza: UAB/IFCE, 2010.

109p. : il. ; 27cm.

ISBN 978-85-475-0013-9

1. MATEMÁTICA – ALGEBRA LINEAR. 2. ESPAÇOS VETORIAIS. 3.
TRANSFORMAÇÕES LINEARES. 4. AUTOVALORES E AUTOVETORES.
I. Joye, Cassandra Ribeiro (Coord.). II. Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE. III Universidade Aberta do Brasil -
UAB. IV. Título.

CDD 512. 50785

Apresentação 7
Referências 108
Currículo 109

SUMÁRIO

AULA 1 Espaços vetoriais: primeiras noções 8

- Tópico 1 Reconhecendo espaços vetoriais 9
- Tópico 2 Explorando espaços vetoriais 14
- Tópico 3 Definições e propriedades relacionadas a espaços vetoriais 21

AULA 2 Espaços vetoriais: combinações lineares, vetores LD e LI e subespaços 25

- Tópico 1 Dependência e independência linear 26
- Tópico 2 Subespaços vetoriais 35

AULA 3 Espaços vetoriais: espaços gerados, operações com subespaços e bases 42

- Tópico 1 Espaços gerados 43
- Tópico 2 Bases, coordenadas e dimensão 53

AULA 4 Transformações Lineares - Parte I 64

- Tópico 1 Definição e exemplos iniciais 65
- Tópico 2 Núcleo e injetividade 71
- Tópico 3 Imagem e sobrejetividade 76
- Tópico 4 Isomorfismos 80

AULA 5 Transformações lineares - Parte II **83**

Tópico 1 A matriz de uma transformação linear 84

Tópico 2 Argumento e forma trigonométrica 90

AULA 6 Autovalores e autovetores **94**

Tópico 1 Autovetores e autovalores 95

Tópico 2 O polinômio característico 100

Tópico 3 Diagonalização de operadores 105

APRESENTAÇÃO

Caro(a) aluno(a)

Seja bem-vindo ao nosso curso de Álgebra Linear! Esta disciplina ocupa uma posição central na Matemática de hoje, uma vez que as ideias formuladas nela fornecem formas de analisar e resolver problemas em muitas áreas aplicadas. A Álgebra Linear abrange três aspectos: o geométrico, o algébrico e o numérico (ou computacional), tornando-se uma ferramenta valiosa para a modelagem de problemas da vida real. Ela é indispensável não apenas para matemáticos, mas também para físicos, engenheiros e cientistas das áreas exatas.

Procuramos construir o nosso texto de maneira gradativa, relacionando novos conceitos com conceitos vistos anteriormente em uma linguagem simples e objetiva, porém sem perder o rigor necessário para alcançarmos o nível de conhecimento que desejamos. Nosso principal objetivo é que você possa dominar bem os conceitos a fim de utilizá-los convenientemente na solução de problemas.

Devemos enfatizar que, em Álgebra Linear, mais importante do que a parte computacional é o entendimento de como as ideias discutidas na disciplina se inter-relacionam. Muitas vezes, a chave para resolver um problema usando a Álgebra Linear é “atacá-lo” do ponto de vista correto.

Dominando a Álgebra Linear, você terá as ferramentas para se apropriar de muitos outros conhecimentos importantes.

A sua participação nas atividades e em cada aula será essencial para que você possa tirar o maior proveito da disciplina. Estaremos à disposição para maiores esclarecimentos.

Agradeceremos quaisquer contribuições no sentido de melhorar o nosso texto.

Desejamos um bom curso a todos!

Gêvane Cunha e Jânio Kléo.

AULA 1

Espaços vetoriais: primeiras noções

Olá! Esta é a nossa primeira aula. Nela, iniciaremos nossos estudos sobre os espaços vetoriais. Compreender bem a noção de Espaço Vetorial é essencial não apenas para todo o restante desta disciplina, ela é extremamente importante também para outras partes da Matemática.

Além da definição de espaço vetorial, apresentaremos diversos exemplos que nos ajudarão a reconhecê-los. Introduziremos também alguns outros conceitos e mostraremos certos resultados associados importantes.

A disciplina de Álgebra Linear ocupa uma posição central na Matemática de hoje, pois fornece formas de analisar e resolver problemas em muitas áreas aplicadas. A Álgebra Linear abrange três aspectos: geométrico, algébrico e numérico (ou computacional). Como ocorre com tantas disciplinas da Matemática, o assunto envolve conceitos, teoremas, provas, fórmulas e cálculos de vários tipos. Entretanto, em Álgebra Linear, mais importante do que a parte computacional, é o entendimento de como as ideias discutidas na disciplina se inter-relacionam. Muitas vezes, a chave para resolver um problema usando a Álgebra Linear é “atacar” o problema do ponto de vista correto. Dominando esta matéria, você terá as ferramentas para se apropriar de muitos outros conhecimentos importantes.

Objetivos

- Estabelecer a importância da Álgebra Linear
- Reconhecer espaços vetoriais
- Realizar operações com vetores
- Conhecer propriedades das operações com vetores

TÓPICO 1

Reconhecendo espaços vetoriais

OBJETIVOS

- Compreender a importância dos espaços vetoriais como estrutura matemática unificadora
- Conceituar espaços vetoriais

Neste tópico, introduziremos o conceito de espaço vetorial que será usado no decorrer de toda disciplina.

Na disciplina de *Fundamentos de Álgebra*, você teve a oportunidade de trabalhar com vetores no plano ($\mathbb{R}^2$) e no espaço ($\mathbb{R}^3$), ou seja, vetores dos espaços bi e tridimensionais, com uma boa ênfase no ponto de vista geométrico. Lá, além da noção de vetores, foram apresentadas algumas operações básicas e examinadas algumas das propriedades dessas operações geometricamente. Do ponto de vista algébrico, os vetores foram representados algebricamente e isso permitiu uma ampliação dos conceitos relacionados a vetores para ambientes mais amplos do que o plano e o espaço. Mais precisamente, foram estudados vetores no espaço n -dimensional ou $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$.

Neste tópico, ampliaremos ainda mais o conceito de vetor. Precisamente, enunciaremos certos axiomas que, uma vez satisfeitos por conjunto de objetos, permite que tais objetos sejam chamados de vetores. Para se ter uma ideia de quão significativa será essa nova generalização dos vetores, vale dizer que poderão ser vistos como estes vetores generalizados objetos como matrizes e funções, dentre outros.

Uma vez que os axiomas que introduzirão os novos tipos de vetores serão baseados nas propriedades de operações com vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, a visão geométrica possível nesses espaços pode ser usada como apoio para a resolução de problemas em espaços mais amplos em normalmente uma intuição geométrica não



SAIBA MAIS!

Revise o assunto de matrizes na aula 5 da disciplina de Fundamentos de Álgebra.

existiria. Assim, ao resolvermos um problema envolvendo vetores em um espaço generalizado (por exemplo, matrizes ou funções), podemos nos apoiar em uma visualização do problema correspondente em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (ANTON e RORRES, 2001).

Grosso modo, um espaço vetorial é uma estrutura matemática constituída por um conjunto e duas operações que satisfazem certas condições. Esperamos, com esta aula, que você possa reconhecer quando uma estrutura matemática é um espaço vetorial. Essa é uma habilidade que você deverá demonstrar em diversas situações na Matemática.

Antes de apresentarmos a definição formal de espaço vetorial, consideremos dois objetos matemáticos bem conhecidos que servirão de motivação:

O espaço n -dimensional ou $\mathbb{R}^n$.

Você teve a oportunidade de trabalhar com o espaço n -dimensional na disciplina de Fundamentos de Álgebra. Os elementos do $\mathbb{R}^n$, as n -uplas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais x_i , foram vistos como ponto generalizado ou vetor generalizado. Você deve lembrar ainda que foram definidas certas operações em $\mathbb{R}^n$, dentre elas a adição de vetores que, dados dois vetores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ do $\mathbb{R}^n$, produz o vetor $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, soma de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, fazendo $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$ o qual também é um vetor do $\mathbb{R}^n$, e a multiplicação de vetores por escalares que, dado um vetor $\mathbf{v}$ e um escalar (número) $k \in \mathbb{R}$, produz o vetor $k\mathbf{v}$, dado por $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$ que também é um vetor do $\mathbb{R}^n$.

As operações de adição de vetores em $\mathbb{R}^n$ e de multiplicação de um vetor do $\mathbb{R}^n$ por um escalar em $\mathbb{R}$ gozam das seguintes propriedades. Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores em $\mathbb{R}^n$ e se a e b são escalares em $\mathbb{R}$, então:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo do $\mathbb{R}^n$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, onde $-\mathbf{u}$ é o vetor $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$
5. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
6. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

$$7. a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$$

$$8. 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

• O conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais que denotaremos por M_n .

O trabalho com matrizes também foi desenvolvido na disciplina de Fundamentos de Álgebra. Por isso você deve lembrar que, em M_n , somamos duas matrizes $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times n}$, fazendo $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times n}$ que é uma matriz de M_n e multiplicamos uma matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ pelo escalar $k \in \mathbb{R}$, colocando $k\mathbf{A} = (ka_{ij})_{n \times n}$ que também é uma matriz de M_n .

As operações de adição de matrizes em M_n e de multiplicação de uma matriz de M_n por um escalar em $\mathbb{R}$, gozam das seguintes propriedades. Se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são matrizes em M_n e se a e b são escalares em $\mathbb{R}$, então:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula de M_n
4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, onde $-\mathbf{A}$ é a matriz $-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{n \times n}$
5. $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$
6. $(a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$
7. $a(b\mathbf{A}) = (ab)\mathbf{A}$
8. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

Você deve ter percebido que os dois conjuntos acima, $\mathbb{R}^n$ e M_n , com as estruturas de adição de seus elementos e multiplicação de seus elementos por escalares reais, apresentam propriedades algébricas comuns. Na verdade, muitos outros conjuntos munidos de operações apropriadas apresentam propriedades semelhantes às oito listadas acima.

Portanto é razoável que, em vez de estudarmos cada um desses conjuntos munidos de adição e multiplicação por escalares adequadas separadamente, adotemos um procedimento unificado. Por isso, estudaremos um conjunto genérico e não vazio V , sobre o qual suporemos estarem definidas duas operações: a adição e a multiplicação por escalares (números reais) e que, além disto, verifiquem oito regras (axiomas). A este tipo de estrutura matemática é o que chamaremos de *espaço vetorial* real. Mais precisamente, temos:

Definição 1 (espaço vetorial): *um espaço vetorial real (ou espaço linear real) consiste no seguinte:*

1. O corpo $\mathbb{R}$ dos números reais (conjunto de escalares)
2. Um conjunto V de objetos, chamados vetores
3. Uma operação, chamada *adição de vetores* (adição vetorial), que associa a cada par de vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V um vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ em V , chamado a soma de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, que verifica as seguintes propriedades:

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ para quaisquer $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V

(b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ para quaisquer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V

(c) Existe um vetor $\mathbf{0}$ em V , chamado *vetor nulo* ou *vetor zero*, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}$ em V

(d) Para cada vetor $\mathbf{u}$ em V , existe um vetor $-\mathbf{u}$ em V , chamado *vetor simétrico de $\mathbf{u}$* (ou *vetor oposto de $\mathbf{u}$* ou *vetor negativo de $\mathbf{u}$*), tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

4. Uma operação, chamada *multiplicação de vetores por escalares* (multiplicação vetorial por escalar), que associa a cada escalar k em $\mathbb{R}$ e cada vetor $\mathbf{u}$ em V um vetor $k\mathbf{u}$ em V , chamado o *produto de k e $\mathbf{u}$* , que verifica as seguintes propriedades:

(e) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ para quaisquer k em $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V

(f) $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ para quaisquer k e l em $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}$ em V

(g) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$ para quaisquer k e l em $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u}$ em V

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ para cada vetor $\mathbf{u}$ em V

Os itens (3) e (4) dizem que as operações de adição vetorial e de multiplicação vetorial por escalar são fechadas em V . Isso significa que adição de vetores de

V é um vetor de V e que a multiplicação de um vetor de V por um escalar real é também um vetor de V . As propriedades (a) e (b) dizem, respectivamente, que a adição de vetores é comutativa e associativa. As propriedades (e) e (f) são chamadas distributivas.

Na definição acima, o conjunto de escalares foi tomado como o corpo dos números reais, $\mathbb{R}$. Entretanto, devemos destacar que uma definição mais geral poderia ser dada.

GUARDE BEM ISSO!



Observe que, conforme estabelecido na definição 1, um espaço vetorial não é apenas um conjunto de vetores. Ele é um objeto composto que consiste de um corpo de escalares, um conjunto de vetores e duas operações com certas propriedades especiais.

De acordo com Anton e Busby (2006, p. 538)

O matemático italiano Giuseppe Peano foi a primeira pessoa a enunciar formalmente os axiomas de espaço vetorial. Esses axiomas, que aparecem num livro intitulado Cálculo Geométrico, publicado em 1888, não foram valorizados por muitos de seus contemporâneos, mas no fim provaram ser uma realização fundamental impressionante. Nesse livro, Peano também definiu formalmente o conceito de dimensão para espaços vetoriais arbitrários.

Por questões de simplificação, e desde que não haja risco de confusão, podemos nos referir a um espaço vetorial como V . Por outro lado, se desejarmos especificar o corpo de escalares $\mathbb{R}$ (ou F , em um caso mais geral), diremos que V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ (F).

É necessário que esteja bem claro para você que, na definição de espaço vetorial, não há qualquer especificação sobre a natureza dos vetores ou das operações. De acordo com $\mathbb{R}^3$ Anton e Rorres (2001, p. 158) “qualquer tipo de objeto pode ser um vetor e as operações de adição e multiplicação por escalar podem não guardar semelhança ou não ter relação alguma com as operações usuais em $\mathbb{R}^n$ ”.

Nesse tópico, introduzimos o conceito de uma importante estrutura matemática, a de espaço vetorial. Ela permite que objetos matemáticos de natureza distinta sejam trabalhados de forma unificada. No próximo, veremos alguns exemplos importantes de espaços vetoriais que deixarão você mais familiarizado com esse novo conceito.



VOCÊ SABIA?

É possível substituir na definição de espaço vetorial o conjunto de escalares do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais por outro corpo qualquer F , como o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, caso em que diríamos **espaço vetorial complexo**. Em nossa disciplina, trataremos apenas de **espaços vetoriais reais**, chamados simplesmente de **espaços vetoriais**.



ATENÇÃO!

Você terá a oportunidade de conhecer e trabalhar com **corpos**, uma importante estrutura matemática, bem como com outras estruturas na disciplina de Estruturas Algébricas do sexto semestre.

TÓPICO 2

Explorando espaços vetoriais

OBJETIVOS

- Explorar espaços vetoriais fundamentais
- Operar com vetores de diversas naturezas
- Demonstrar propriedades das operações com vetores

Para que você possa fixar melhor a definição de espaço vetorial, vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO 1

O ESPAÇO VETORIAL N-DIMENSIONAL

O conjunto $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, conforme visto na motivação, é um espaço vetorial. Os axiomas (a) a (h) seguem das definições das operações e podem ser encontradas na aula 2 da disciplina de Fundamentos de Álgebra. Para $n = 1, 2$ ou 3 , temos os casos especiais $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ que correspondem, respectivamente, à reta, ao plano e ao espaço. Observe que os vetores de $\mathbb{R}$ são números reais, os de $\mathbb{R}^2$ são pares ordenados de números reais, e os de $\mathbb{R}^3$ são ternas ordenadas de números reais.

Antes de prosseguirmos com mais exemplos, vamos, como forma de exercício, mostrar que o caso particular $\mathbb{R}^2$ é de fato um espaço vetorial, evidenciando que as exigências da definição 1 são satisfeitas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1

Mostre que $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação de vetores por escalares reais definidas em $\mathbb{R}^2$, ou seja, com as operações de adição vetorial e multiplicação vetorial por escalares reais definidas por

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2)$$

SOLUÇÃO:

Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^2$ e k e l escalares quaisquer em $\mathbb{R}$. Temos, pelas definições das operações, que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in \mathbb{R}^2$ e $k\mathbf{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2) \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $\mathbb{R}^2$ é fechado para as operações de adição de vetores e de multiplicação de vetores por escalares em $\mathbb{R}$. Devemos mostrar que os axiomas (a) a (h) da definição 1 são satisfeitos. De fato:

(a) Comutativa da adição:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2) = (v_1, v_2) + (u_1, u_2) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

(b) Associativa da adição:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (u_1, u_2) + ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) = (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2)) = ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2) = ((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) + (w_1, w_2) \\ &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \end{aligned}$$

(c) Elemento neutro da adição:

Devemos encontrar um vetor $\mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. Para tanto, basta tomar $\mathbf{0} = (0, 0)$. Desse modo, teremos

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = (u_1, u_2) + (0, 0) = (u_1 + 0, u_2 + 0) = (u_1, u_2) = \mathbf{u}.$$

(d) Elemento simétrico da adição:

Devemos mostrar que cada vetor $\mathbf{u}$ em $\mathbb{R}^2$ tem um simétrico $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Para isso, basta definir $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2)$. Assim, teremos,

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (u_1, u_2) + (-u_1, -u_2) = (u_1 + (-u_1), u_2 + (-u_2)) = (0, 0) = \mathbf{0}.$$

$$\begin{aligned}
(e) \quad k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) = k(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (k(u_1 + v_1), k(u_2 + v_2)) \\
&= (ku_1 + kv_1, ku_2 + kv_2) = (ku_1, ku_2) + (kv_1, kv_2) = k(u_1, u_2) + k(v_1, v_2) \\
&= k\mathbf{v} + k\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f) \quad (k + l)\mathbf{u} &= (k + l)(u_1, u_2) = ((k + l)u_1, (k + l)u_2) = (ku_1 + lu_1, ku_2 + lu_2) \\
&= (ku_1, ku_2) + (lu_1, lu_2) = k(u_1, u_2) + l(u_1, u_2) \\
&= k\mathbf{u} + l\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g) \quad k(l\mathbf{u}) &= k(l(u_1, u_2)) = k(lu_1, lu_2) = (k(lu_1), k(lu_2)) = ((kl)u_1, (kl)u_2) = (kl)(u_1, u_2) \\
&= (kl)\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$(h) \quad 1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2) = (1u_1, 1u_2) = (u_1, u_2) = \mathbf{u}$$

Isso conclui a prova de que a estrutura matemática dada é um espaço vetorial real.

Vamos continuar apresentando mais alguns exemplos de espaços vetoriais reais. Deixaremos a prova formal de que os axiomas da definição 1 são satisfeitos em cada caso como exercício para você.

EXEMPLO 2

O ESPAÇO VETORIAL DAS MATRIZES 2×3

O conjunto V de todas as matrizes 2×3 com entradas reais que denotaremos por $M_{2 \times 3}$ com a adição vetorial e a multiplicação vetorial por escalar definidas, respectivamente, como a adição matricial e a multiplicação matricial por escalar usuais (aquelas vistas na aula 6 de Fundamentos de Álgebra) é um espaço vetorial real. Lembre que se $\mathbf{X} \in M_{2 \times 3}$ então $\mathbf{X}$ é representada por

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}.$$

Dadas duas matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ em $M_{2 \times 3}$ e um escalar real k , temos

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}$$

$$k\mathbf{A} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}.$$

Os axiomas (a) a (h) da definição 1 seguem das definições das operações e das propriedades da soma e multiplicação usuais de números reais. Vejamos a demonstração do axioma (a):

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & b_{13} + a_{13} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & b_{23} + a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{B} + \mathbf{A}\end{aligned}$$

Os demais axiomas (b) a (h) podem ser demonstrados de forma similar. Observe que o elemento neutro da adição vetorial é a matriz nula 0×3 dada por

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e que a matriz simétrica de } \mathbf{A} \text{ é a matriz } -\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO 3

O ESPAÇO VETORIAL DAS MATRIZES $m \times n$

O conjunto V de todas as matrizes $m \times n$ com entradas reais que denotaremos por $M_{m \times n}$ junto com as operações de adição matricial e a multiplicação matricial por escalar é um espaço vetorial real. O exemplo 2 é um caso particular desse espaço vetorial mais geral e as argumentações apresentadas ali podem ser adaptadas para mostrar que as exigências da definição 1 são satisfeitas para o espaço das matrizes $m \times n$. Note que o vetor nulo $\mathbf{0}$ é a matriz nula $m \times n$ e que, se o vetor $\mathbf{u}$ é a matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, então o vetor $-\mathbf{u}$ negativo de $\mathbf{u}$ é a matriz $-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{m \times n}$.

Observe que o exemplo 2 é um caso particular desse espaço vetorial quando $m = 2$ e $n = 3$. Note também que o espaço M_n das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais, apresentado na motivação, munido das operações usuais de adição matricial e de multiplicação matricial por escalar, é também um caso particular quando $m = n$.

Até aqui, mantivemos a notação utilizada na disciplina de Fundamentos de Álgebra, denotando vetores com destaque em negrito. Doravante, tendo em vista que você já está bastante familiarizado com vetores, usaremos também denotar vetores sem o destaque em negrito.

EXEMPLO 4

O ESPAÇO VETORIAL DAS FUNÇÕES REAIS DEFINIDAS EM UM CONJUNTO NÃO-VAZIO

Seja A um conjunto não-vazio qualquer e seja $V = \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (funções reais definidas em A). Se $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$, vamos definir a adição de f e g e a multiplicação da função f pelo escalar k para serem, respectivamente, as funções $f + g: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $kf: A \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

$$(kf)(x) = kf(x)$$

Assim, o valor da soma $f + g$ no ponto $x \in A$ é obtido somando-se os valores de f e g no ponto x , e o valor de kf no ponto $x \in A$ é k vezes o valor de f no ponto x . É possível mostrar que $V = \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ munido dessas operações é um espaço vetorial real. Da forma como foram definidas, a adição de funções V e a multiplicação de funções de V por escalares em $\mathbb{R}$ são fechadas em V . O vetor nulo é a função identicamente nula que associa a cada elemento de A o escalar 0 em $\mathbb{R}$ e, para cada f em V , o negativo de f é a função $-f: A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(-f)(x) = -f(x).$$

Para demonstrar todos os axiomas da definição 1, é necessário estabelecer ainda que se f e g são dois vetores em V , $f = g$ equivale a termos $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Verifique você mesmo que os axiomas (a) a (h) são satisfeitos.

Como casos particulares do espaço $V = \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ acima, temos aquele das funções reais definidas para todos os valores reais (funções da reta na reta) com as mesmas operações definidas em V que denotaremos por $\mathcal{F}(-\infty, \infty)$ e os espaços das funções reais definidas em algum intervalo fechado $[a, b]$ ou aberto (a, b) , também com as mesmas operações definidas em V que denotaremos por $\mathcal{F}[a, b]$ e $\mathcal{F}(a, b)$.

Em geral, espaços vetoriais que envolvem funções reais desempenham um papel importante na Matemática. Outros exemplos de tais espaços são o espaço das funções contínuas definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ (denotado por C) ou das funções com derivadas contínuas até ordem $k \in \mathbb{R}$, com k fixo, definidas em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ (denotado por D), ambos munidos das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em V).

Os espaços vetoriais que tratamos até aqui envolvem operações com as quais já estamos familiarizados. Nos próximos exemplos, apresentamos espaços vetoriais um pouco mais sofisticados do que os anteriores.

EXEMPLO 5

UM ESPAÇO VETORIAL INCOMUM

Seja $V = (0, \infty)$, o semi-eixo positivo da reta real. Este conjunto, quando munido das operações usuais de soma e multiplicação, não é um espaço vetorial. De fato, basta notar que não existe elemento neutro para a adição. Entretanto, se modificarmos as operações de adição de vetores de V e de multiplicação de vetores de V por escalares em $\mathbb{R}$, definindo a soma de dois vetores quaisquer $x, y \in V$ (representada por $x \oplus y$) e o produto de um vetor qualquer $x \in V$ pelo escalar

$k \in \mathbb{R}$ (representada por $k \odot x$), respectivamente por
$$\begin{aligned} x \oplus y &= xy \\ k \odot x &= x^k \end{aligned}$$

ou seja, a adição vetorial de x com y é o produto usual de x e y , e o produto vetorial de x pelo escalar k é a potência de x com expoente k . Com essas operações, V se torna um espaço vetorial. De fato, uma vez que o produto usual de dois números reais positivos (vetores de V) é um número real positivo (vetor de V) e que a potência de um número real positivo (vetor de V) com expoente um número real é um número real positivo (vetor de V), as operações de adição vetorial e de produto vetorial por escalares reais são fechadas em V . Resta-nos verificar que os oito axiomas da definição são satisfeitos.

(a) $u \oplus v = uv = vu = v \oplus u$ para quaisquer u e v em V

(b) $u \oplus (v \oplus w) = u \oplus (vw) = u(vw) = (uv)w = (u \oplus v)w = (u \oplus v) \oplus w$ para quaisquer u, v e w em V

(c) Como $1 \in V$ e $1 \oplus u = 1u = u$, para qualquer u em V , 1 é o elemento neutro da adição vetorial em V

(d) Dado $u \in V$, temos que $u > 0$. Logo, $u^{-1} \in V$ e $u \oplus u^{-1} = uu^{-1} = 1$ que é o elemento neutro da adição vetorial em V . Portanto cada vetor u em V possui um vetor simétrico em V , o vetor u^{-1} .

(e) $k \odot (u \oplus v) = k \odot (uv) = (uv)^k = u^k v^k = (k \odot u) \oplus (k \odot v)$ para quaisquer k em $\mathbb{R}$ e u e v em V ;

(f) $(k + l) \odot u = u^{k+l} = u^k u^l = u^k \oplus u^l = (k \odot u) \oplus (l \odot u)$ para quaisquer k e l em $\mathbb{R}$ e u em V ;

(g) $k \odot (l \odot u) = k \odot u^l = (u^l)^k = u^{lk} = u^{kl} = (kl) \odot u$ para quaisquer k e l em $\mathbb{R}$ e u em V ;

(h) $1 \odot u = u^1 = u$ para qualquer u em V .

Finalizamos este tópico como dois exemplos de conjuntos que não são espaços vetoriais. O primeiro corresponde ao exemplo 5 de Poole (2006, p. 390), e o segundo ao exemplo 5 de Anton e Rorres (2001, p. 159).

EXEMPLO 6

UM CONJUNTO QUE NÃO ESPAÇO VETORIAL

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros com as operações usuais não é um espaço vetorial real. Para demonstrar esse fato, devemos verificar que alguma das condições na definição 1 não é satisfeita. Para tanto, é suficiente apresentarmos algum contra-exemplo, ou seja, algum exemplo específico que mostra que a condição não é satisfeita. Aqui, podemos verificar que a operação de multiplicação por escalar não é fechada em $\mathbb{Z}$. De fato, o múltiplo do número inteiro 2 pelo escalar $\frac{1}{3}$, por exemplo, é $\frac{2}{3}$, que não é um número inteiro. Assim, não é verdade que kx está em

$\mathbb{Z}$ quaisquer que sejam o escalar k em $\mathbb{R}$ e o vetor x em V .

EXEMPLO 7

OUTRO CONJUNTO QUE NÃO ESPAÇO VETORIAL

Seja $V = \mathbb{R}^2$ com as operações de adição e multiplicação por escalar dadas por: Se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ são vetores em $\mathbb{R}^2$ e, se k é um escalar em $\mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ ku &= (ku_1, 0) \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, se $u = (-2, 3)$, $v = (1, 4)$ e $k = 5$, então

$$\begin{aligned} u + v &= (-2, 3) + (1, 4) = (-2 + 1, 3 + 4) = (-1, 7) \\ ku &= 5(-2, 3) = (5(-2), 0) = (-10, 0) \end{aligned}$$

Aqui a adição é a adição usual em $\mathbb{R}^2$, mas a multiplicação por escalar não é a usual. Observe que, se $u = (u_1, u_2)$ é um vetor qualquer do $\mathbb{R}^2$ tal que $u_2 \neq 0$, então

$$1u = 1(u_1, u_2) = (1u_1, 0) = (u_1, 0) \neq u.$$

Logo o axioma (h) não é satisfeito e $\mathbb{R}^2$ não é um espaço vetorial com as operações dadas.

No próximo tópico, apresentamos algumas propriedades bastante úteis dos espaços vetoriais.

TÓPICO 3

Definições e propriedades relacionadas a espaços vetoriais

OBJETIVOS

- Conhecer propriedades úteis dos espaços vetoriais
- Definir combinação linear de vetores

Neste tópico, apresentamos algumas propriedades bem simples, mas bastante úteis dos espaços vetoriais. Ademais, introduzimos a definição de combinação linear de vetores, uma forma de produzir novos vetores a partir de vetores dados. Começamos estabelecendo a unicidade do vetor nulo e do simétrico.

Teorema 1 (unicidade dos vetores nulo e simétrico): Seja V um espaço vetorial, então:

- a) O vetor nulo de V (que existe) é único.
- b) O vetor negativo (que existe) de cada vetor u de V é único.

DEMONSTRAÇÃO:

Prova de (a): o axioma (c) garante a existência de um vetor nulo (denotado por 0) de V . Suponha que exista um outro vetor $0'$ satisfazendo $u + 0' = u$, qualquer

que seja o vetor u em V . Fazendo $u = 0$, temos $0 + 0' = 0$. Por outro lado, uma vez que 0 é um elemento neutro da adição, pelos axiomas (a) e (c), segue que

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'.$$

Portanto o elemento neutro da adição em V é único.

Prova de (b): dado um vetor u em V , suponha que existam dois vetores v e v' tais que $u + v = 0$ e $u + v' = 0$. Dessas igualdades e dos axiomas (a), (b) e (c), segue que

$$v = v + 0 = v + (u + v') = (v + u) + v' = (u + v) + v' = 0 + v' = v'.$$

Logo $v = v'$ e o negativo de u em V é único. Este é denotado por $-u$.

O teorema seguinte generaliza para espaços vetoriais gerais propriedades que foram enunciadas para o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ na aula 2 de Fundamentos de Álgebra. Essas importantes propriedades podem ser usadas para simplificar os cálculos com vetores e decorrem dos axiomas de espaço vetorial e de propriedades das operações com números reais. Vale ressaltar que, uma vez que as propriedades no teorema são para um espaço vetorial geral, elas são válidas para todo espaço vetorial específico.

GUARDE BEM ISSO!



O negativo de u (que existe e é único) é usado para definir a subtração de vetores em termos da adição. Essa é a mesma ideia usada na aritmética comum de números quando escrevemos $b - a = b + (-a)$, que expressa a subtração em termos da adição.

Definição 2 (subtração de vetores): Sejam V um espaço vetorial, e u e v vetores em V , então a diferença de u com v é o vetor $v - u$, definido por

$$v - u = v + (-u).$$

DEMONSTRAÇÃO:

Prova de (a): pelo fechamento da multiplicação por escalar, $0u$ é um vetor de V que, pelo axioma (d), tem um negativo $-0u$ em V . Assim:

$$0u = 0u + 0 = 0u + [0u + (-0u)] = (0u + 0u) + (-0u) = (0 + 0)u + (-0u) = 0u + (-0u) = 0$$

A quatro primeiras igualdades acima seguem, respectivamente, dos axiomas (c), (d), (b) e (f). A quinta igualdade é uma propriedade da adição de números reais. Finalmente, a sexta igualdade segue do axioma (d).

Prova de (b): esta prova é similar a do item (a). Pelo axioma (c) $\mathbf{0}$ é um vetor de V . Desse modo, pelo fechamento da multiplicação por escalar, $k\mathbf{0}$ é um vetor de V que, pelo axioma (d), tem um negativo $-\mathbf{0u}$ em V . Assim:

$$k\mathbf{0} = k\mathbf{0} + \mathbf{0} = k\mathbf{0} + [k\mathbf{0} + (-k\mathbf{0})] = (k\mathbf{0} + k\mathbf{0}) + (-k\mathbf{0}) = k(\mathbf{0} + \mathbf{0}) + (-k\mathbf{0}) = k\mathbf{0} + (-k\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

A seis igualdades acima seguem, respectivamente, dos axiomas (c), (d), (b), (e), (c) e (d).

Prova de (c): devemos mostrar que $(-1)\mathbf{u}$ é o negativo $-\mathbf{u}$ de $\mathbf{u}$. Para tanto, precisamos mostrar que $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. De fato, temos que

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = [1 + (-1)]\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

A duas primeiras igualdades acima seguem, respectivamente, dos axiomas (h) e (f). A terceira igualdade é uma propriedade da adição de números reais. Finalmente, a quarta igualdade corresponde ao item (a) deste teorema.

Prova de (d): suponha que $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Devemos mostrar que $k = 0$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Se $k = 0$, nossa prova está completa (não há nada a provar). Vamos agora supor que $k \neq 0$. Nesse caso, de propriedades da multiplicação de números reais, o inverso multiplicativo $\frac{1}{k}$ de k está definido. Temos então

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = \left(\frac{1}{k}k\right)\mathbf{u} = \frac{1}{k}(k\mathbf{u}) = \frac{1}{k}\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

que conclui a prova. A primeira e terceira igualdades acima seguem, respectivamente, dos axiomas (h) e (g). A segunda igualdade é uma propriedade da multiplicação de números reais. A quarta igualdade é a nossa hipótese. Finalmente, a quinta igualdade corresponde ao item (b) deste teorema.

O teorema 3 a seguir estabelece mais algumas propriedades interessantes dos espaços vetoriais. Deixamos sua demonstração como exercício para você.

Teorema 3 (propriedades das operações com vetores): Sejam V um espaço vetorial e $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores quaisquer em V , então:

a) Para qualquer vetor $\mathbf{u}$ em V , $-(-\mathbf{u}) = \mathbf{u}$

b) Se $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ para quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ em V

c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores quaisquer em V , então existe um único vetor $\mathbf{w}$ em V tal que $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v}$



SAIBA MAIS!

Você pode aprofundar seus conhecimentos consultando as referências que citamos e/ou visitando páginas da internet. Abaixo listamos algumas páginas interessantes que podem ajudá-lo nessa pesquisa:

http://www.dcc.ufrj.br/~rincon/Disciplinas/Algebra%20Linear/Aula_002.pdf

<https://www.ime.usp.br/~laurichi/verao/aulas.pdf>

Nessa aula, iniciamos nosso estudo dos espaços vetoriais, uma importante estrutura matemática que engloba diversos objetos matemáticos conhecidos. Na próxima aula, daremos continuidade a este estudo apresentando mais conceitos e resultados relacionados. Introduziremos o conceito de subespaço vetorial, um subconjunto de um espaço vetorial que é ele próprio um espaço vetorial.

AULA 2

Espaços vetoriais:
combinações lineares, vetores
LD e LI e subespaços

Caro(a) aluno(a),

Nesta segunda aula continuaremos estudando os espaços vetoriais, apresentando mais conceitos e resultados relacionados. Aprenderemos o que é uma combinação linear de vetores, o que significam vetores linearmente independentes e linearmente dependentes e introduziremos o conceito de subespaço vetorial, um subconjunto de um espaço vetorial que é ele próprio um espaço vetorial.

Objetivos

- Combinar vetores
- Identificar vetores LD e vetores LI
- Reconhecer subespaços vetoriais
- Caracterizar subespaços vetoriais

TÓPICO 1

Dependência e independência linear

OBJETIVOS

- Combinar vetores
- Identificar vetores LD e vetores LI

VOCÊ SABIA?



A propriedade comutativa e a associativa da adição de vetores implicam que a soma envolvendo mais que dois vetores é independente da forma como esses vetores são combinados e associados. Assim, se v_1 , v_2 , v_3 e v_4 são vetores em um espaço vetorial V , então

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) + (v_3 + v_4) &= \\ [(v_1 + v_2) + v_3] + v_4 &= \\ v_3 + [v_2 + (v_1 + v_4)].\end{aligned}$$

Portanto podemos escrever, sem risco de confusão, tal soma como

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4.$$

Neste tópico, veremos que os vetores de um espaço vetorial podem ser combinados e estabeleceremos as condições para que um conjunto de vetores sejam linearmente dependentes ou linearmente independentes.

Iniciamos apresentando uma característica bastante interessante e muito importante dos espaços vetoriais: a de obter novos vetores a partir de vetores dados. Antes de prosseguirmos, leia com atenção a observação em destaque.

As operações de adição e multiplicação por escalar são usadas, frequentemente, em combinação para formar novos vetores. Por exemplo, se v_1 , v_2 e v_3 são vetores dados em um espaço vetorial V , então os vetores

$$x = 3v_1 + v_2 - 2v_3 \text{ e } y = 4v_1 - 5v_2 + 6v_3$$

são obtidos dessa maneira. De um modo geral, definimos

Definição 1 (combinação linear de vetores): Seja V um espaço vetorial real. Um vetor x em V é uma **combinação linear** dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ em V se existirem escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ em $\mathbb{R}$, tais que x pode ser expresso na forma

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

Os escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ são denominados **coeficientes** da combinação linear.

No caso em que $n=1$, a expressão da definição acima se torna $x = c_1 v_1$. Desse modo, dizer que x é uma combinação linear de v_1 é o mesmo que dizer que x é um múltiplo escalar de v_1 . Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO 1

O vetor $x = (2, 5, -6)$ é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (2, -1, 0)$ e $v_2 = (4, 1, -3)$ do $\mathbb{R}^3$.

De fato, note que $(2, 5, -6) = -3(2, -1, 0) + 2(4, 1, -3)$. Nesse caso, os coeficientes da combinação linear são os escalares reais -3 e 2 .

EXEMPLO 2

O vetor $x = (2, 5, -6)$ não é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, -1)$ do $\mathbb{R}^3$.

De fato, para que o vetor x fosse combinação linear de v_1 e v_2 , deveriam existir escalares reais c_1 e c_2 tais que $x = c_1 v_1 + c_2 v_2$, ou seja, tais que a equação vetorial

$$(2, 5, -6) = c_1(1, -1, 0) + c_2(1, 0, -1)$$

seja satisfeita. Esta equação é equivalente ao sistema linear

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 2 \\ -c_1 & = & 5 \\ -c_2 & = & -6 \end{array}$$

A segunda e terceira equações deste sistema nos dão que $c_1 = -5$ e $c_2 = 6$. Entretanto a primeira equação não é satisfeita por esses valores. Logo, o sistema não possui solução. Assim, não existem escalares reais c_1 e c_2 tais que

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2.$$

Portanto, x não é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2 .



GUARDE BEM ISSO!

Uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, é simplesmente uma soma de múltiplos escalares de $v_1, v_2, \dots, v_n$.

EXEMPLO 3

Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, espaço vetorial formado pelo polinômio nulo e por todos os polinômios de uma variável real com coeficientes reais e de grau menor ou igual a n , o polinômio $p(t) = 3 - t^2$ é uma combinação linear dos polinômios $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$ e $p_3(t) = t^2$.

De fato, note que $p(t) = 3p_1(t) + 0p_2(t) + (-1)p_3(t)$. Nesse caso, os coeficientes da combinação linear são os escalares reais 3, 0 e -1 .

Como pode ser visto no texto abaixo, uma aplicação interessante de combinações lineares se dá em modelos de cor computadorizada.

As cores nas telas dos monitores de computadores são geralmente baseadas no que se chama o modelo de cores RGB. As cores neste sistema são criadas juntando percentagens de três cores primárias, a saber, o vermelho (com a inicial R do inglês red), o verde (com a inicial G do inglês green) e o azul (com a inicial B do inglês blue). Uma maneira de fazer isto é identificar as cores primárias com os vetores

$\mathbf{r} = (1, 0, 0)$ (vermelho puro), $\mathbf{g} = (0, 1, 0)$ (verde puro), $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ (azul puro) de $\mathbb{R}^3$ e criar todas as outras cores formando combinações lineares de $\mathbf{r}$, $\mathbf{g}$ e $\mathbf{b}$ usando coeficientes entre 0 e 1, inclusive; estes coeficientes representam a percentagem de cada cor pura na mistura. O conjunto de todas estas cores é o espaço RGB ou, melhor, o cubo de cores RGB. Assim, cada vetor de cor $\mathbf{c}$ neste cubo pode ser expresso como uma combinação linear da forma

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{r} + c_2\mathbf{g} + c_3\mathbf{b} = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$$

onde. Como indicamos na figura, os vértices do cubo representam as cores primárias puras junto com as cores preto, branco, magenta, ciano e amarelo. Os vetores ao longo da diagonal entre preto e branco representam tonalidades de cinza.

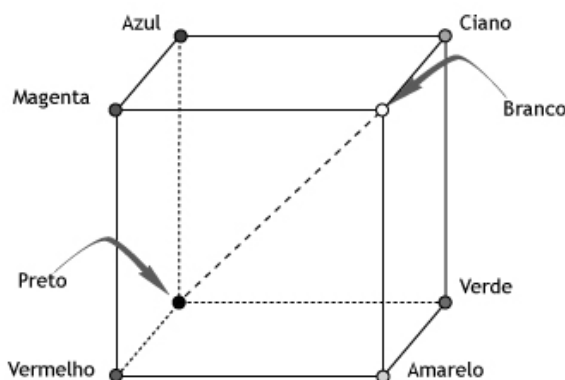


Figura 1 - Cubo de cores RGB

Fonte: (Extraído de ANTON e BUSBY, 2006, p. 33)

Em Álgebra Linear, torna-se muito importante saber se um dado vetor v de um determinado espaço vetorial V é combinação linear de outros vetores desse espaço, ou seja, se v pode ser obtido a partir de outros vetores. Neste caso, o vetor v pode ser considerado “supérfluo”. De um modo geral, dados os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de um espaço vetorial V , é importante, de acordo com Boldrini (1980, p. 114) “saber se não existem vetores “supérfluos”, isto é, se algum desses vetores não é uma combinação linear dos outros”. Para tanto, introduzimos os conceitos de dependência e independência linear.

Definição 2 (dependência e independência linear): Sejam V um espaço vetorial real. Dizemos que um subconjunto não-vazio S de vetores de V é **linearmente dependente** (ou simplesmente, **dependente**), se existirem vetores distintos $v_1, v_2, \dots, v_n$ em S , tais que a equação vetorial

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0$$

admite solução não-trivial (solução não-nula), ou seja, se o vetor nulo de V pode ser escrito como combinação linear de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de S com algum dos escalares sendo não-nulo. Se o conjunto S não é linearmente dependente, dizemos que ele é **linearmente independente** (ou simplesmente, **independente**).

No caso de S conter uma quantidade finita de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, dizemos também que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são dependentes (ou independentes) para dizer que S é dependente (ou independente).

Vejamos alguns primeiros exemplos para melhor fixar esses novos e importantes conceitos.

EXEMPLO 1 - UM CONJUNTO DE VETORES LD

Se $v_1 = (4, -2, 0, -1)$, $v_2 = (-1, 2, 3, 8)$ e $v_3 = (11, -4, 3, 5)$, então o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ de vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ é LD. De fato, note que $3v_1 + v_2 - v_3 = 0$. Portanto, a equação vetorial $x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0$ admite solução com algum $x_i \neq 0$ (solução não-trivial).

EXEMPLO 2 - UM CONJUNTO DE VETORES LI

Os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ são LI. Para verificar isso, precisamos saber quais as possíveis soluções da equação vetorial



ATENÇÃO!

Dado um conjunto não-vazio $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V , é fácil notar que a equação vetorial $x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0$ admite pelo menos uma solução. De fato, $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ é solução (a solução trivial). Quando esta é a única solução, S é linearmente independente (abreviadamente, LI). Quando a equação acima admite solução com algum $x_i \neq 0$ (solução não-trivial), S é linearmente dependente (abreviadamente, LD).

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0,$$

que é dada por,

$$x_1(1,1,1) + x_2(1,-1,0) + x_3(1,0,-1) = (0,0,0).$$

Esta equação equivale ao sistema linear

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Por sua vez, o sistema acima é equivalente ao sistema linear escalonado

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & - & \frac{3}{2}x_3 & = & 0 \end{array}$$

que é triangular superior e admite como única solução (obtida por retrossubstituição), $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (a solução trivial). Logo, os vetores v_1 , v_2 e v_3 são LI.

Antes de continuar com mais alguns exemplos, vamos a um exercício para verificar se determinados vetores são LD ou LI.



ATENÇÃO!

Reveja a aula 4 de Fundamentos de Álgebra para relembrar o algoritmo que reduz um sistema linear a um sistema linear escalonado equivalente e como obter as soluções por retrossubstituição.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1

Verifique se as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ são vetores LD ou LI no espaço vetorial M_2 das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais.

SOLUÇÃO:

Precisamos saber quais as possíveis soluções da equação vetorial

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou, equivalentemente, da equação matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta equação equivale ao sistema linear

$$\begin{aligned}x_1 &+ x_3 = 0 \\x_2 &+ x_3 = 0 \\x_2 &+ x_3 = 0\end{aligned}$$

que, por sua vez, equivale ao sistema linear

$$\begin{aligned}x_1 &+ x_3 = 0 \\x_2 &+ x_3 = 0\end{aligned},$$

que admite como solução as triplas do tipo $(-\alpha, -\alpha, \alpha)$, onde α é qualquer número real. Para $\alpha = 1$, por exemplo, temos a solução $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 1$. Logo, as matrizes dadas são LD.

Vejamos, agora, mais alguns exemplos interessantes. Algumas das verificações são deixadas como forma de exercício para você.

EXEMPLO 3 - CONJUNTOS DE VETORES LI EM $\mathbb{R}^n$

Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ são LI. De fato, a equação vetorial

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = 0$$

é dada por

$$x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = (0, 0)$$

ou, equivalentemente, por

$$(x_1, x_2) = (0, 0).$$

Mas, isto implica que $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, de modo que o conjunto $S = \{e_1, e_2\}$ é LI. Raciocinando de modo similar, é possível mostrar que os vetores

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1),$$

formam um conjunto de n vetores LI em $\mathbb{R}^n$. Note que o vetor $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ é aquele vetor do $\mathbb{R}^n$ em que o i -ésimo componente é igual a 1 e os demais componentes são todos iguais a 0. Esses são os chamados *vetores canônicos* do $\mathbb{R}^n$. Em particular, os vetores canônicos do $\mathbb{R}^3$ são $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$.



VOCÊ SABIA?

1. Um conjunto formado por um único vetor v_1 não-nulo ($v_1 \neq 0$) de um espaço vetorial V é LI. De fato, se $x_1 v_1 = 0$, então $x_1 = 0$ ou $v_1 = 0$. Mas, desde que $v_1 \neq 0$, temos $x_1 = 0$. Portanto, $\{v_1\}$ é LI, qualquer que seja o vetor $v_1 \neq 0$.
2. Um conjunto finito $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V que contenha o vetor nulo é LD. De fato, se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é tal que $v_j = 0$, para algum j , então

$$0v_1 + \dots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \dots + 0v_n = 0$$
3. Qualquer conjunto de vetores de um espaço vetorial V que contenha um subconjunto LD é LD.
4. Qualquer subconjunto de um conjunto LI de vetores de um espaço vetorial V é LI.

EXEMPLO 4 - UM CONJUNTO DE VETORES LD EM $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

Os polinômios $p_1(t)=1$, $p_2(t)=t$, $p_3(t)=t^2$ e $p_4(t)=2-t^2$ são LI em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (espaço vetorial real constituído do conjunto formado pelo polinômio nulo e por todos os polinômios de uma variável real com coeficientes reais e de grau menor ou igual a n). Para verificar isto, devemos mostrar que a equação vetorial

$$x_1 p_1(t) + x_2 p_2(t) + x_3 p_3(t) + x_4 p_4(t) = 0$$

tem solução com algum $x_i \neq 0$. Note que $2p_1(t) + 0p_2(t) + p_3(t) - p_4(t) = 0$. De fato, temos

$$2p_1(t) + 0p_2(t) + p_3(t) - p_4(t) = 2 \cdot 1 + 0 \cdot t + t^2 - (2 - t^2) = 0,$$

para todo t em $\mathbb{R}$.

Logo, os polinômios dados são LI.

Vamos agora destacar alguns fatos gerais interessantes que servirão para aumentar a nossa lista de exemplos. Justifique, você mesmo, os dois últimos.

A expressão “linearmente dependente” sugere que os vetores dependem uns dos outros de alguma maneira. Isto é o que mostra o teorema seguinte, conforme visto em (ANTON e RORRES, 2001, p. 170).

Teorema 1 (caracterização de vetores LD/LI): Um conjunto finito S de dois ou mais vetores de um espaço vetorial V é:

- a) linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de S .
- b) linearmente independente se, e somente se, nenhum vetor em S pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de S .

DEMONSTRAÇÃO:

Vamos provar o item (a) e deixar o item (b) como exercício para você.

Prova de (a): Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um conjunto com dois ou mais vetores de V . Vamos dividir a prova em duas partes. Inicialmente, suponha que S é linearmente dependente. Temos, então, que a equação vetorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0$$

admite solução não-trivial, ou seja, com os escalares não todos nulos ($x_j \neq 0$, para algum j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$). Multiplicando a equação acima por $\frac{1}{x_j}$ e rearranjando, temos

$$v_j = -\frac{x_1}{x_j} v_1 - \dots - \frac{x_{j-1}}{x_j} v_{j-1} - \frac{x_{j+1}}{x_j} v_{j+1} - \dots - \frac{x_n}{x_j} v_n.$$

Portanto, o vetor v_j é combinação linear dos outros vetores de S . Vamos agora mostrar a recíproca. Suponha que pelo menos um dos vetores de S , digamos v_j para algum j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, é combinação linear dos outros. Assim, existem escalares $c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n$ tais que

$$v_j = c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_n v_n.$$

Rearranjando esta equação temos

$$c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} + (-1)v_j + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_n v_n = 0.$$

Assim, a equação vetorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0$$

é satisfeita com

$$x_1 = c_1, \dots, x_{j-1} = c_{j-1}, x_j = -1, x_{j+1} = c_{j+1}, \dots, x_n = c_n,$$

ou seja, admite solução não-trivial (com algum escalar não-nulo). Portanto, S é linearmente dependente. Isto conclui a prova do item (a).

Como consequências do teorema 1 temos os seguintes resultados:

1. Um conjunto de dois vetores é LD se, e somente se, um deles é um múltiplo escalar do outro. Em particular, em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$ isto significa que dois vetores v_1 e v_2 são LD se, e somente se, eles estão sobre uma mesma reta passando pela origem. Veja a figura 2 abaixo.

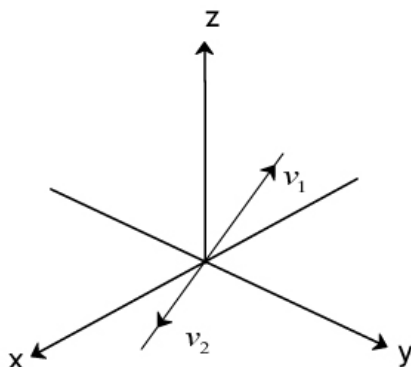


Figura 2 - Dois vetores LD em $\mathbb{R}^3$

2. Um conjunto de três vetores é LD se, e somente se, um deles for uma soma de múltiplos escalares dos outros dois. Em particular, em $\mathbb{R}^3$ isto significa que três vetores v_1 , v_2 e v_3 são LD se, e somente se, eles estão sobre um mesmo plano passando pela origem. Veja a figura 3 abaixo.

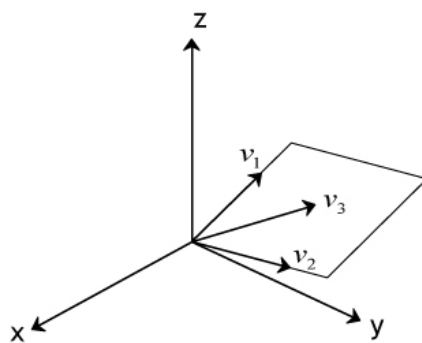


Figura 3 - Três vetores LD em $\mathbb{R}^3$.

Neste tópico, vimos que vetores de um espaço vetorial podem ser combinados para a obtenção de novos vetores e identificamos quando um conjunto de vetores é linearmente dependente ou linearmente independente. No próximo, introduziremos o conceito de subespaço vetorial.

TÓPICO 2

Subespaços vetoriais

OBJETIVOS

- Reconhecer subespaços vetoriais
- Caracterizar subespaços vetoriais

Neste tópico, introduziremos o conceito de subespaço vetorial, um subconjunto de um espaço vetorial que é ele próprio um espaço vetorial. Veremos também como os subespaços vetoriais podem ser caracterizados e realizaremos algumas operações importantes com estes subconjuntos.

O conceito de subespaço vetorial se torna importante, pois muitas vezes precisamos determinar quando subconjuntos de um espaço vetorial são espaços vetoriais “menores”.

Considere, por exemplo, o caso de $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ que é um espaço vetorial com as operações usuais de adição de vetores e de multiplicação de vetores por escalares reais. Uma reta R de V passando pela origem é um subconjunto de V que funciona como um espaço vetorial (figura 4). De fato, ao somarmos dois vetores de R , obtemos um vetor também em R e, ao multiplicarmos um vetor de R por um escalar real, obtemos também um vetor de R . Assim, R é fechado em relação à adição de vetores e à multiplicação de vetores por escalares reais.

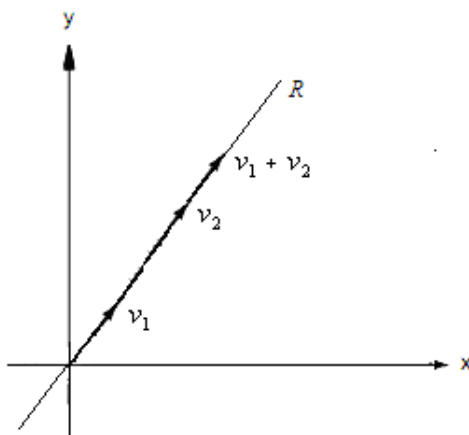


Figura 4 - Uma reta R de $\mathbb{R}^2$ passando pela origem.



ATENÇÃO!

Por questões de simplificação, muitas vezes nos referimos a um espaço vetorial W de um espaço vetorial V , dizendo apenas que W é um subespaço de V .

Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 3 (subespaço vetorial): Seja V um espaço vetorial real (sobre $\mathbb{R}$). Um **subespaço** de V é um subconjunto W de V que é ele próprio um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de adição vetorial e de multiplicação vetorial por escalar definidas em V .

Pensando na definição de espaço vetorial dada na aula 1, para mostrar que um conjunto W é um espaço vetorial real com relação a uma adição e a uma multiplicação por escalar dadas, deveríamos mostrar que todas as condições daquela definição são satisfeitas, ou seja, que o conjunto W é fechado com relação às operações de adição vetorial e de multiplicação vetorial por escalares reais e que os oito axiomas são verificados. Entretanto, de acordo com Anton e Rorres (2001, p. 162)

... se W é parte de um conjunto maior V que já é sabido ser um espaço vetorial, então alguns axiomas não precisam ser conferidos para W pois eles são “herdados” de V . Por exemplo, não há necessidade de conferir que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (...) para W pois isto vale para todos os vetores de V e consequentemente para todos os vetores de W .



VOCÊ SABIA?

É comum escrever $(V, +, \cdot)$ para indicar um espaço vetorial sobre um determinado corpo K . Seguindo essa notação, podemos escrever $(W, +, \cdot)$ para indicar um subespaço vetorial do espaço vetorial $(V, +, \cdot)$.

Do mesmo modo que o axioma (a) (a propriedade comutativa da adição vetorial) é herdado por W de V , também são herdados por W de V os axiomas (b), (e), (f), (g) e (h). Por conseguinte, estas propriedades não necessitam ser verificadas. A seguir, apresentamos um resultado que dá uma caracterização para subespaços vetoriais. Ele estabelece que os axiomas (c) e (d) podem ter suas verificações também omitidas, restando apenas a necessidade de verificar a validade do fechamento de W com relação às operações.

Teorema 2 (caracterização de subespaço vetorial): Se W é um subconjunto não vazio de um espaço vetorial real V , então W é um subespaço de V se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- i) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores quaisquer em W , então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é um vetor em W .
- ii) Se l é um escalar real qualquer e $\mathbf{u}$ é um vetor qualquer em W , então $l\mathbf{u}$ é um vetor em W .

DEMONSTRAÇÃO:

A prova é constituída de duas partes. Inicialmente, devemos mostrar que se W é um subespaço de V , então as condições (i) e (ii) são satisfeitas.

Este fato segue das definições de espaço vetorial (definição 1 da aula 1) e de subespaço vetorial (definição 3 acima). Se W é subespaço de V , então W é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$) com relação às operações em V . Logo as condições (i) e (ii) do teorema 2 acima que correspondem aos itens (3) e (4) da definição de espaços vetoriais são satisfeitas.

Resta-nos provar a recíproca, ou seja, que se as condições (i) e (ii) são satisfeitas, então W é um subespaço de V .



GUARDE BEM ISSO!

O teorema de caracterização de subespaços vetoriais estabelece que W é um subespaço de V se, e somente se, W é não vazio e é fechado com relação às operações de adição vetorial e de multiplicação vetorial por escalares definidas em V .

Para tanto, devemos mostrar que W é um espaço vetorial com as operações definidas em V , ou seja, que todas as condições da definição de espaço vetorial são satisfeitas. Os itens (3) e (4) dessa definição correspondem exatamente às condições (i) e (ii) do teorema, sendo satisfeitas por hipótese. Resta verificar que os oito axiomas (a)-(h) são também satisfeitos. Os axiomas (a), (b), (e), (f), (g) e (h) são naturalmente satisfeitos pelos vetores em W , pois eles são satisfeitos pelos vetores em V e $W \subset V$. Para completar

a prova, devemos verificar que os axiomas (c) e (d) (existência do vetor nulo e existência do simétrico, respectivamente) são satisfeitos pelos vetores em W . Seja u um vetor qualquer em W , a condição (ii) com $l = 0$ dá que $0u$ está em W . Mas, de propriedades vista na aula 1 (teorema 3), temos que $0u = 0$. Portanto, o vetor nulo 0 está em W . Um argumento similar com $l = -1$ e o fato que $(-1)u = -u$ dá que $-u$ está em W , qualquer que seja o vetor u em W .

Vamos fixar melhor a definição de subespaços vetoriais apresentando alguns exemplos.

EXEMPLO 5 - UM SUBESPAÇO DE $\mathbb{R}^2$

Considere o subconjunto $W = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$, ou seja, o conjunto constituído de todos os pares ordenados que têm a segunda coordenada igual ao oposto da primeira. Uma vez que o vetor $(1, -1)$ está em W , ele é não-vazio. Além disso, dados dois vetores quaisquer $u = (a, -a)$, $a \in \mathbb{R}$ e $v = (b, -b)$, $b \in \mathbb{R}$ em W e um escalar real qualquer l , temos:

- i. $u + v = (a, -a) + (b, -b) = (a + b, -(a + b))$ que é um vetor de W , pois a segunda coordenada é igual ao oposto da primeira.
- ii. $lu = l(a, -a) = (la, -la)$ que é um vetor de W , pois a segunda coordenada é igual ao oposto da primeira.

Portanto, as condições do teorema 2 são satisfeitas e W é subespaço do $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 6 - UM SUBCONJUNTO DE $\mathbb{R}^2$ QUE NÃO É SUBESPAÇO

Considere o subconjunto W de $\mathbb{R}^2$, constituído de todos os pares ordenados (x, y) tais $x \geq 0$, ou seja, dos pontos que estão no primeiro ou no quarto quadrante. W é não-vazio, pois o ponto $(0, 0) \in W$. Podemos notar que W é fechado para

a adição usual de vetores, mas ele não é fechado para a multiplicação vetorial por escalares reais. De fato, o vetor $v = (2, -1)$ está em W , mas seu simétrico $-v = (-1)v = (-2, 1)$ não está em W (o primeiro componente de $-v$ é -2 que não é ≥ 0). Assim, W não é subespaço do $\mathbb{R}^2$. Veja este exemplo ilustrado na figura 5 abaixo.

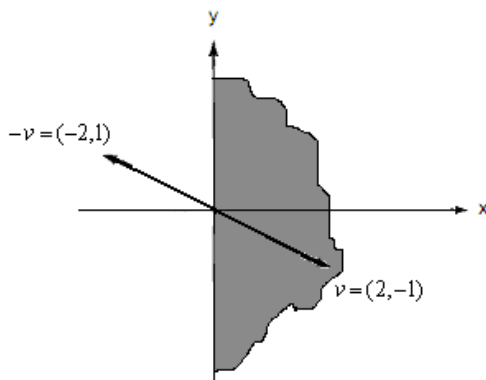


Figura 5 - Um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que não é subespaço

EXEMPLO 7 - SUBESPAÇOS DE MATRIZES

Seja $V = M_n$ o espaço vetorial real de todas as matrizes $n \times n$ com entradas reais, com as operações de adição matricial e multiplicação matricial por escalar.

Considere o subconjunto W de V das matrizes triangulares superiores. W é não-vazio, pois a matriz nula $n \times n$ é triangular superior. Uma vez que a soma de duas matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular superior e que o produto de uma matriz triangular superior por um escalar real é também uma matriz triangular superior, W é um subespaço de V . São também subespaços de V , os subconjuntos formados pelas matrizes de cada um dos tipos abaixo:

- triangulares inferiores;
- diagonais;
- simétricas;
- antissimétricas.

Antes de prosseguirmos com mais exemplos, vamos a alguns fatos básicos.



SAIBA MAIS!

1. Todo subespaço W de um espaço vetorial V contém o vetor nulo de V . Para ver este fato, basta tomar um vetor u qualquer em W (que existe pois W é não-vazio) e usar a condição (ii) com $l = 0$. Isso nos dá que $0u = 0$ está em W . Outra forma de mostrar que 0 está em W , seria usando a condição (ii) com $l = -1$, junto com a condição (i). Isso resultaria em $u + (-1)u = u + (-u) = 0$ que está em W , pois u e $-u$ estão em W .
2. Todo espaço vetorial contém pelo menos dois subespaços: o conjunto formado pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial. Estes são chamados subespaços triviais.

Agora que sabemos que todo subespaço W de um espaço vetorial V contém o vetor nulo de V podemos substituir na caracterização vista no teorema 2 a condição $W \neq \emptyset$ por $\mathbf{0} \in W$. Aliás, um bom começo para testar se um subconjunto W de um espaço vetorial V é ou não um subespaço de V é verificar se o vetor nulo $\mathbf{0}$ está ou não em W . Caso $\mathbf{0} \notin W$ podemos garantir que W não é subespaço. Caso $\mathbf{0} \in W$ precisamos verificar ainda que W é fechado para as operações definidas em V . Vejamos mais alguns exemplos de subespaços vetoriais.

EXEMPLO 8 - SUBESPAÇOS DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA HOMOGÊNEO DE EQUAÇÕES LINEARES

Em certas situações usuais importantes surgem exemplos de subespaços vetoriais. Considere, por exemplo, o sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ \text{S: } 2x + 4y + z &= 0, \\ 3x + 7y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

que escrito na forma matricial é

$$\text{S: } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que o vetor nulo $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertencente a $M_{3 \times 1}$ é solução do sistema linear

S (a solução trivial). Note também que se $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ são vetores solução de S ,

$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ ainda é um vetor solução de S , pois

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e que $l \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ também é um vetor solução de S , qualquer que seja o escalar l ,

pois

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o conjunto-solução do sistema linear S é subespaço vetorial de $M_{3 \times 1}$.

De um modo geral, o conjunto-solução de um sistema linear homogêneo qualquer de n equações é um subespaço do espaço vetorial $M_{n \times 1}$. Demonstre este fato como exercício.

Nessa aula aprendemos o que é uma combinação linear de vetores, o que são vetores linearmente independentes e linearmente dependentes e exploramos o importante conceito de subespaço vetorial, apresentando diversos exemplos. Na próxima aula veremos como podemos realizar certas operações com subespaços vetoriais para produzir novos subespaços e introduziremos os conceitos de base e dimensão de espaços vetoriais.



VOCÊ SABIA?

Se um sistema linear S de n equações não for homogêneo, o que acontece com seu conjunto solução? Uma vez que a soma de vetores-solução de S nem sempre é um vetor-solução, o conjunto-solução de S não é um subespaço de $M_{n \times 1}$. Verifique este fato como exercício. Alternativamente, você pode concluir que o conjunto-solução do sistema S não é um subespaço de $M_{n \times 1}$, verificando que o vetor nulo $\mathbf{0}_{n \times 1}$ pertencente a $M_{3 \times 1}$ não é solução do sistema linear S .



SAIBA MAIS!

Amplie seus conhecimentos consultando as referências que citamos e/ou visitando páginas da internet.

Algumas páginas interessantes que podem ajudá-lo são:

<http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/alinear/espvvetor.htm>

<http://www.lac.usp.br/~paulo/cap1.pdf>

AULA 3

Espaços vetoriais: espaços gerados, operações com subespaços e bases

Olá! Nesta aula, finalizaremos nossos estudos dos espaços vetoriais. Nela aprenderemos a gerar subespaços de certo espaço vetorial V de duas formas diferentes: a partir de um conjunto de vetores de V ou combinando outros subespaços de V por meio de algumas operações. Veremos, também, conceitos fundamentais como os de base e dimensão de um espaço vetorial e como fazer a mudança de uma para outra base.

Objetivos

- Identificar espaços gerados
- Reconhecer conjuntos geradores
- Operar com subespaços vetoriais
- Obter bases de espaços vetoriais
- Determinar dimensão e coordenadas
- Fazer mudanças de bases

TÓPICO 1

Espaços gerados

OBJETIVOS

- Identificar espaços gerados
- Reconhecer conjuntos geradores
- Operar com subespaços vetoriais

Neste tópico, veremos como obter um subespaço de V e apresentaremos o conceito de espaço gerado a partir de certos vetores de um espaço vetorial V . Aprenderemos também algumas operações que podem ser feitas com subespaços vetoriais e que servirão para a obtenção de novos subespaços a partir de subespaços dados. Veremos, ainda, alguns exemplos que ilustrarão esses conceitos. Iniciemos com a seguinte observação:

O exemplo seguinte ilustra essa observação.

EXEMPLO 1

Considere os vetores $v_1 = (1, -1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, -1)$ do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$. Uma vez que $(1, 2, -3) = -2(1, -1, 0) + 3(1, 0, -1)$, temos que o vetor $(1, 2, -3)$ de V é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2 (os coeficientes da combinação linear são os escalares reais -2 e 3). Por outro lado, o vetor $(2, 5, -6)$ de V não é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2 , conforme pode ser conferido no exemplo 2 da aula 2.

Uma vez fixados $v_1, v_2, \dots, v_n$ vetores em um espaço vetorial V , vamos considerar o conjunto W consistindo de todos os vetores que podem ser dados



VOCÊ SABIA?

Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ são vetores de um espaço vetorial V , então pode ocorrer que alguns vetores de V sejam combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, enquanto que outros vetores de V podem não ser combinações lineares desses vetores.

como combinações lineares destes vetores. O teorema seguinte assegura que W é um subespaço vetorial de V . Sua demonstração não é difícil e pode ser encontrada em diversos livros de Álgebra Linear (veja, por exemplo, Anton e Rorres, 2001). Fazemos tal demonstração aqui apenas com o intuito de que nosso texto esteja mais completo e para que você possa recordar os passos para demonstrar que um certo conjunto W é subespaço de um espaço vetorial V .

Teorema 1 (subespaço das combinações lineares): Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ são vetores de um espaço vetorial real V , então:

- a) O conjunto W de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ é um subespaço de V .
- b) W é o menor subespaço de V que contém os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, o que significa que qualquer outro subespaço W' de V que contenha os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ também contém W .

DEMONSTRAÇÃO:

Para a comprovação do item (a), devemos mostrar que W é não vazio e é fechado com relação às operações de adição vetorial e de multiplicação vetorial por escalares definidas em V . Inicialmente, note que o vetor nulo de V está em W , pois $0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n = 0$. Portanto, W é não vazio. Agora se u e v são vetores em W , então eles são uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, ou seja, temos

$$u = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n \text{ e } v = l_1v_1 + l_2v_2 + \dots + l_nv_n,$$

onde $k_1, k_2, \dots, k_n$ e $l_1, l_2, \dots, l_n$ são escalares reais. Portanto, temos que

$$u + v = (k_1 + l_1)v_1 + (k_2 + l_2)v_2 + \dots + (k_n + l_n)v_n$$

e, para qualquer escalar real k ,

$$ku = (kk_1)v_1 + (kk_2)v_2 + \dots + (kk_n)v_n.$$

Isso mostra que $u + v$ e ku são combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ e, portanto, estão em W . Logo, W é fechado com relação à adição vetorial e à multiplicação vetorial por escalares definidas em V . Isso atesta que W é de fato um subespaço de V .

Vamos agora explicar o item (b). Note inicialmente que cada vetor v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, pois temos

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + 0v_{i+2} + \dots + 0v_n.$$

Assim, o subespaço W contém cada um dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$. Seja agora W' um subespaço qualquer de V que contenha os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$. Uma vez

que W' é fechado com relação à adição vetorial e à multiplicação vetorial por escalares definidas em V , ele deve conter também todas as combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$. Assim, W' contém cada um dos vetores de W . Isto conclui a prova.

O subespaço W das combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ recebe um nome especial e uma notação particular apresentados na definição seguinte:

Definição 1 (subespaço gerado): Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ são vetores de um espaço vetorial real V , o subespaço W de V consistindo de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ é chamado **subespaço gerado** por $v_1, v_2, \dots, v_n$ e, dizemos também que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ geram W . Usamos a notação

$$W = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

para indicar que W é o subespaço gerado por $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Simbolicamente, podemos escrever

$$W = [v_1, v_2, \dots, v_n] = \{v \in V \mid v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n\}.$$

Mais geralmente, se S é um subconjunto (finito ou infinito) não vazio de um espaço vetorial V , o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S é um subespaço vetorial de V , denominado *subespaço gerado* por S e denotado por $[S]$. Dizemos, também, que o conjunto S gera o subespaço $[S]$. Alguns autores utilizam as notações

$$\text{ger}(S) \text{ e } \text{span}(S)$$

para indicar o subespaço gerado por S , realçando as iniciais da palavra *gerado* e *spanned* (do inglês). Vamos a alguns exemplos para melhor fixar os conceitos.

EXEMPLO 2

O subespaço de $V = \mathbb{R}^2$ gerado pelo vetor $v = (1, -2)$ é

$$\begin{aligned} W = [(1, -2)] &= \{c(1, -2) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(c, -2c) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) \mid y = -2x\} \end{aligned}$$

ou seja, a reta que contém o vetor $v = (1, -2)$ (passa pela origem de $\mathbb{R}^2$ e possui a direção do vetor $v = (1, -2)$).

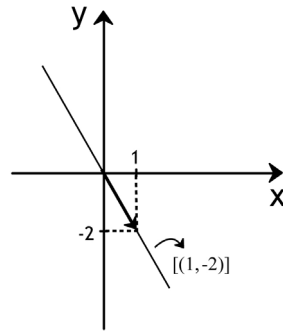


Figura 1 - Subespaço do $\mathbb{R}^2$ gerado pelo vetor $v = (1, -2)$

EXEMPLO 3

O subespaço de $V = \mathbb{R}^3$ gerado pelo vetor v , $v \neq 0$ é

$$[v] = \{cv \mid c \in \mathbb{R}\},$$

que é a reta passando pela origem determinada pelo vetor v .

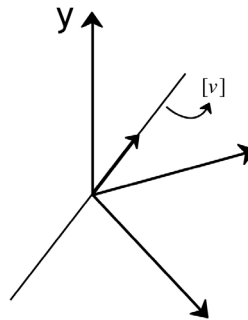


Figura 2 - Subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelo vetor v .

EXEMPLO 4

O subespaço de $V = \mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $S = \{v_1, v_2\}$, com $v_2 \neq kv_1$, para todo $k \in \mathbb{R}$ é

$$[v_1, v_2] = \{c_1v_1 + c_2v_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\},$$

que é o plano passando pela origem determinada pelos vetores v_1 e v_2 .

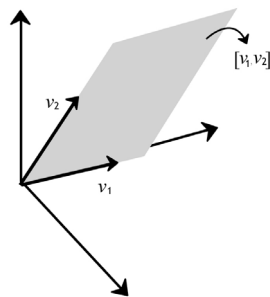


Figura 4 - Subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores v_1 e v_2 .

EXEMPLO 5

O subespaço de $V = \mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ é o próprio $\mathbb{R}^3$, ou seja, $[v_1, v_2, v_3] = \mathbb{R}^3$.

De fato, dado um vetor $v = (x, y, z)$ qualquer do $\mathbb{R}^3$, temos

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1),$$

ou seja,

$$v = xv_1 + yv_2 + zv_3.$$

Assim, $v \in [v_1, v_2, v_3]$, o que significa que todo vetor do $\mathbb{R}^3$ está em $[v_1, v_2, v_3]$ ou que $\mathbb{R}^3 \subset [v_1, v_2, v_3]$. Uma vez que $[v_1, v_2, v_3]$ é subespaço do $\mathbb{R}^3$ (e, portanto, $[v_1, v_2, v_3] \subset \mathbb{R}^3$), concluímos que $[v_1, v_2, v_3]$ é o próprio $\mathbb{R}^3$.

EXEMPLO 6

O subespaço de $V = M_2$ (das matrizes quadradas de ordem 2) gerado pelos

vetores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é:

$$\begin{aligned} [v_1, v_2, v_3] &= \{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

ou seja, o subespaço das matrizes quadradas de ordem que são simétricas.

Vejamos agora algumas propriedades úteis de conjuntos geradores / subespaços gerados. Suas demonstrações são deixadas como exercício.

Teorema 2 (propriedades de conjuntos geradores / subespaços gerados):

Sejam S e S' subconjuntos não vazios de um espaço vetorial real V , então:

- a) $S \subset [S]$.
- b) $S = [S]$ se, e somente se, S é um subespaço vetorial de V .
- c) $[[S]] = [S]$.
- d) Se $S \subset S'$ então $[S] \subset [S']$.

O teorema seguinte estabelece as condições para que dois subespaços gerados sejam iguais.

Teorema 3 (igualdade subespaços gerados): Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ e $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ são dois conjuntos de vetores em um espaço vetorial real V , então

$$[v_1, v_2, \dots, v_m] = [w_1, w_2, \dots, w_n]$$

se, e somente se, cada vetor em S é uma combinação linear dos vetores de S' e cada vetor em S' é uma combinação linear dos vetores de S .

O teorema 3 deixa claro que os conjuntos geradores não são únicos. Por exemplo, qualquer vetor não-nulo da reta no exemplo 3 gera aquela reta e quaisquer dois vetores não-colineares do plano no exemplo 4 gera aquele plano.

Agora vamos perceber que é possível combinar subespaços de um espaço vetorial V para obter novos subespaços de V , por meio de certas operações. Apresentaremos as operações de adição, interseção e reunião de conjuntos. Começamos com um teorema que estabelece que a interseção de subespaços de um espaço vetorial V ainda é um subespaço de V .

Teorema 4 (interseção de subespaços): Se S_1 e S_2 são subespaços de um espaço vetorial real V , então a interseção $S_1 \cap S_2$ dada por

$$S_1 \cap S_2 = \{v \mid v \in S_1 \text{ e } v \in S_2\}$$

é também um subespaço de V .

DEMONSTRAÇÃO:

Se S_1 e S_2 são subespaços do espaço vetorial V , temos que:

i) O vetor nulo (0) de V está também em S_1 e S_2 e, conseqüentemente, temos que

$$0 \in S_1 \cap S_2.$$

Assim, $S_1 \cap S_2$ é não vazio.

ii) Se u e v são vetores quaisquer em $S_1 \cap S_2$, então u e v pertencem a S_1 , e também a S_2 . Assim, $u + v \in S_1$ e $u + v \in S_2$. Portanto,

$$u + v \in S_1 \cap S_2.$$

iii) Se l é um escalar real e u é um vetor qualquer em $S_1 \cap S_2$, então u pertence a S_1 , e também a S_2 . Assim, $lu \in S_1$ e $lu \in S_2$. Portanto,

$$lu \in S_1 \cap S_2.$$

Assim, $S_1 \cap S_2$ é não vazio e é fechado com relação às operações de adição vetorial e de multiplicação vetorial por escalares definidas em V e, portanto, é um subespaço de V .

EXEMPLO 7

Seja $V = \mathbb{R}^3$ e S_1 e S_2 planos distintos de V que passam pela origem, então $S_1 \cap S_2$ é a reta (passando pela origem) comum aos dois planos (figura 5).

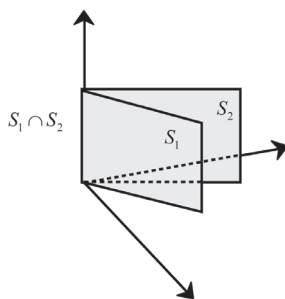


Figura 5 - Subespaço interseção $S_1 \cap S_2$ dos espaços S_1 e S_2 do $\mathbb{R}^3$

O teorema 4 pode ser generalizado para a interseção de uma coleção qualquer de subespaços de V , como descrito na observação seguinte.

Por outro lado, a reunião $S_1 \cup S_2$ de dois subespaços S_1 e S_2 de um espaço vetorial V , dada por

$$S_1 \cup S_2 = \{v \mid v \in S_1 \text{ ou } v \in S_2\},$$

não é necessariamente um subespaço de V .

Deixamos a verificação dessa afirmação como exercício para você.

A seguir, apresentamos a definição de soma de subconjuntos de um espaço vetorial.



VOCÊ SABIA?

Seja V um espaço vetorial real. A interseção de uma coleção qualquer de subespaços de V é um subespaço de V .

Definição 2 (soma de subconjuntos de um espaço vetorial): Sejam S_1 e S_2 subconjuntos de um espaço vetorial real V , o conjunto de todas as somas

$$v_1 + v_2$$

de vetores tais que $v_1 \in S_1$ e $v_2 \in S_2$ é chamado a **soma** dos subconjuntos S_1 e S_2 e é denotado por

$$S_1 + S_2.$$

É fácil mostrar que a soma de subespaços de um espaço vetorial V é também um subespaço de V que contém cada um dos subespaços parcela.

Teorema 5 (soma de subespaços): Se S_1 e S_2 são subespaços de um espaço vetorial real V , então a soma $S_1 + S_2$ é também um subespaço de V .

DEMONSTRAÇÃO:

Se S_1 e S_2 são subespaços do espaço vetorial V , temos que:

i) O vetor nulo (0) de V está também em S_1 e S_2 e, conseqüentemente, temos que

$$0 = 0 + 0 \in S_1 + S_2.$$

Assim, $S_1 + S_2$ é não vazio.

ii) Se u e v são vetores quaisquer em $S_1 + S_2$, então $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in S_1$ e $u_2 \in S_2$ e $v = v_1 + v_2$, com $v_1 \in S_1$ e $v_2 \in S_2$, e temos que

$$u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in S_1 + S_2,$$

pois $u_1 + v_1 \in S_1$ e $u_2 + v_2 \in S_2$.

iii) Se l é um escalar real e u é um vetor qualquer em $S_1 + S_2$, então $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in S_1$ e $u_2 \in S_2$, e temos que

$$lu = l(u_1 + u_2) = lu_1 + lu_2 \in S_1 + S_2,$$

pois $lu_1 \in S_1$ e $lu_2 \in S_2$.

Assim, $S_1 + S_2$ é não vazio e é fechado com relação às operações de adição vetorial e de multiplicação vetorial por escalares definidas em V e, portanto, é um subespaço de V .

EXEMPLO 8

Seja $V = \mathbb{R}^3$ e S_1 e S_2 retas distintas de V que passam pela origem, então $S_1 + S_2$ é o plano que contém as retas S_1 e S_2 (figura 6).

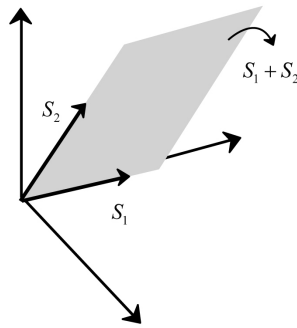


Figura 6 - Subespaço soma $S_1 + S_2$ dos espaços S_1 e S_2 do $\mathbb{R}^3$

EXEMPLO 9

Sejam $V = \mathbb{R}^3$, S_1 o subespaço de V gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (0,0,1)$, ou seja, $S_1 = [v_1, v_2]$ é o plano (passando pela origem) que contém os vetores v_1 e v_2 e S_2 o subespaço de V gerado pelo vetor $v_3 = (1,1,1)$, ou seja, $S_2 = [v_3]$ é a reta (passando pela origem) que contém o vetor v_3 . Uma vez que $v_3 = v_1 + v_2$, $v_3 \in S_1$ e a reta S_1 está contida no plano S_2 ($S_1 \subset S_2$). Portanto, $S_1 + S_2 = S_1$ (figura 6).

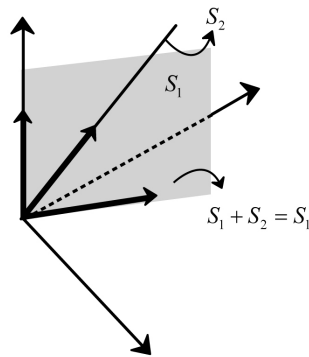


Figura 7 - Subespaço soma $S_1 + S_2$ dos espaços S_1 e S_2 do $\mathbb{R}^3$

EXEMPLO 10

Se $V = M_2$ (espaço das matrizes quadradas de ordem 2) e S_1 e S_2 são os subespaços das matrizes quadradas de ordem 2 triangulares superiores e triangulares inferiores, respectivamente. Ou seja,

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

e



VOCÊ SABIA?

1. É natural estender a definição de soma de subconjuntos de um espaço vetorial real V para uma quantidade finita de parcelas e, é possível mostrar que a soma de uma quantidade finita de subespaços de V ainda é um subespaço de V .

2. A interseção, a reunião e a soma de subconjuntos de V estão relacionadas por

$$S_1 \cap S_2 \subset S_1 \cup S_2 \subset S_1 + S_2.$$

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \right\},$$

então

$$S = S_1 + S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = M_2.$$

Finalizamos este tópico apresentando um tipo especial de soma de subespaços, denominada soma direta.

Definição 3 (soma direta de subespaços vetoriais): Sejam S_1 e S_2 subespaços de um espaço vetorial real V . Dizemos que $S_1 + S_2$ é a soma direta de S_1 e S_2 se

$$S_1 \cap S_2 = \{0\}.$$

Nesse caso, usamos também a notação $S_1 \oplus S_2$ para denotar a soma $S_1 + S_2$.

A definição 3 estabelece que uma soma de subespaços é soma direta se, e somente se, a interseção dos subespaços parcelas contém apenas o vetor nulo. O teorema 6 a seguir dá a condição necessária e suficiente para que um espaço vetorial seja a soma direta de dois seus subespaços. A demonstração do teorema 6 pode ser encontrada na literatura específica.

Teorema 6 (soma de subespaços): Sejam S_1 e S_2 subespaços de um espaço vetorial real V . Então, $V = S_1 \oplus S_2$ se, e somente se, para cada $v \in V$ existirem um único $u_1 \in S_1$ e um único $u_2 \in S_2$ tais que $v = u_1 + u_2$.

EXEMPLO 11

As somas nos exemplos 8 e 10 são diretas, uma vez que nos dois casos temos $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. No exemplo 10, temos ainda $V = S_1 \oplus S_2$. Por outro lado, desde que $S_1 \cap S_2 = S_2 \neq \{0\}$ no exemplo 9, aquela soma não é direta.

Neste tópico, vimos como obter subespaços vetoriais a partir de um conjunto de vetores ou combinando subespaços dados. Finalizaremos nossa aula com o tópico seguinte onde aprenderemos mais alguns conceitos úteis.

TÓPICO 2

Bases, coordenadas e dimensão

OBJETIVOS

- Obter bases de espaços vetoriais
- Determinar dimensão e coordenadas
- Fazer mudanças de bases

Neste tópico, introduziremos conceitos fundamentais como os de base e dimensão de um espaço vetorial. Aprenderemos, também, a determinar as coordenadas de um vetor qualquer em certa base e veremos como fazer a mudança de uma para outra base de um espaço vetorial.

Em geral, um espaço vetorial contém uma infinidade de vetores. O único espaço vetorial com um número finito de elementos é o espaço trivial contendo unicamente o vetor nulo. Apesar de conterem uma infinidade de vetores, muitos espaços vetoriais são gerados por conjuntos finitos de vetores. Para estes espaços e também para os casos em que o espaço vetorial não é gerado por um conjunto finito de vetores, a ideia de *base* de um espaço vetorial é bastante útil. Essa noção é apresentada na definição seguinte e os exemplos que seguem servirão para que ela seja melhor fixada.

Definição 4 (base de um espaço vetorial): Uma base para um espaço vetorial V é conjunto linearmente independente de vetores de V que gera o espaço V . Dizemos também que o espaço é de dimensão-finita se ele tem uma base finita. Caso um espaço V não tenha uma base finita, dizemos que ele é de dimensão-infinita. O espaço vetorial nulo é considerado de dimensão finita.

EXEMPLO 12

Consideremos três vetores quaisquer v_1 , v_2 e v_3 no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ (plano) tais que nenhum deles seja múltiplo escalar do outro (figura 8). Qualquer um desses vetores, digamos v_1 , é ele mesmo LI, mas não gera o $\mathbb{R}^2$ (mais precisamente, o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado por v_1 é a reta que contém v_1 , ou seja, a reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^2$ e possui a direção do vetor v_1). Os três vetores v_1 , v_2 e v_3 certamente geram $\mathbb{R}^2$, mas não são LI (na verdade, qualquer subconjunto do $\mathbb{R}^2$ com mais de dois vetores é LD – deixamos esse fato como exercício para você). Por outro lado, quaisquer dois desses vetores, digamos v_1 e v_2 , têm as duas propriedades, ou seja, eles geram e são LI e, portanto, formam uma base do $\mathbb{R}^2$. A independência linear de v_1 e v_2 segue como uma das consequências do teorema 1 da aula 2, pelo do fato de eles não serem múltiplos escalar um do outro. Para mostrar que v_1 e v_2 geram o $\mathbb{R}^2$, devemos mostrar que um vetor qualquer $v = (a, b)$ do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1 e v_2 , ou seja, que a equação vetorial

$$v = xv_1 + yv_2$$

tem solução. Supondo que,

$$\begin{aligned} v_1 &= (v_{11}, v_{12}) \\ v_2 &= (v_{21}, v_{22}) \end{aligned},$$

em termos de componentes, a equação vetorial acima é equivalente a

$$x(v_{11}, v_{12}) + y(v_{21}, v_{22}) = (a, b).$$

Igualando os componentes, temos o sistema linear

$$\begin{aligned} v_{11}x + v_{21}y &= a, \\ v_{12}x + v_{22}y &= b \end{aligned}$$

cujas matriz dos coeficientes é

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que v_1 e v_2 não são múltiplos escalar um do outro, o determinante dessa matriz é diferente de 0 (veja a comprovação deste fato na observação abaixo) e, o sistema tem solução (única).

Observação: Caso $\begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix} = 0$, teríamos $v_{11}v_{22} = v_{12}v_{21}$. Olhando para os

componentes de v_2 , temos três possibilidades:

$v_{21} \neq 0$ e $v_{22} \neq 0$, que implicaria em, dividindo a igualdade por $v_{21}v_{22}$,

$\frac{v_{11}}{v_{21}} = \frac{v_{12}}{v_{22}} = k$. Nesse caso, $v_{11} = kv_{21}$, $v_{12} = kv_{22}$, donde v_1 e v_2 seriam múltiplos.

$v_{21} = 0$ e $v_{22} \neq 0$, que implicaria em $v_{11} = 0$. Desse modo, v_1 e v_2 pertenceriam ambos ao eixo dos x , sendo múltiplos um do outro.

$v_{21} \neq 0$ e $v_{22} = 0$, que implicaria em $v_{12} = 0$. Nesse caso, v_1 e v_2 pertenceriam ambos ao eixo dos y , sendo múltiplos um do outro.

O caso, $v_{21} = v_{22} = 0$ não se aplica pois, se v_1 e v_2 não são múltiplos escalar um do outro, nenhum deles pode ser o vetor nulo.

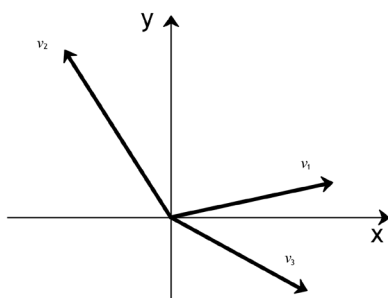


Figura 8 - Subconjuntos geradores e bases do $\mathbb{R}^2$

O argumento usado para mostrar que v_1 e v_2 geram o $\mathbb{R}^2$ serve também para mostrar que v_1 e v_2 são LI. De fato, fazendo $v = 0$ teríamos que a única solução da equação vetorial seria $x = y = 0$, ou seja, uma combinação linear de v_1 e v_2 dando o vetor nulo, resulta que os coeficientes da combinação são todos iguais a zero.

Ele serve também para mostrar que os três vetores v_1 , v_2 e v_3 geram $\mathbb{R}^2$, conforme afirmado acima. De fato, uma vez que $v_3 \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1 e v_2 , o teorema 3 garante a afirmação.

O exemplo 12 deixa claro que um espaço vetorial não tem uma base única. Quaisquer dois vetores do $\mathbb{R}^2$ que não são múltiplos um do outro, por exemplo, constituem uma base do $\mathbb{R}^2$. No exemplo seguinte, conheceremos uma base particular importante do $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLO 13

No espaço vetorial n -dimensional $\mathbb{R}^n$ considere o subconjunto dos vetores $e_1, e_2, \dots, e_n$ definido por

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned},$$

onde e_i é o vetor do $\mathbb{R}^n$ cujo i -ésima componente é igual a 1 e os demais componentes são iguais a 0. Uma vez que a equação vetorial

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = 0,$$

tem como única solução, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, os vetores $e_1, e_2, \dots, e_n$ são LI. Por outro lado, dado um vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ qualquer do $\mathbb{R}^n$, temos

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

que mostra que os vetores $e_1, e_2, \dots, e_n$ geram o $\mathbb{R}^n$. Assim, o conjunto $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$. Esta base particular é chamada *base canônica* do $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLO 14

Seja $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial formado pelo polinômio nulo e por todos os polinômios de uma variável real com coeficientes reais e de grau menor ou igual a n . O subconjunto

$$B = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ constituído dos monômios $p_k(t) = t^k$ de grau menor ou igual a n é uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. De fato, um polinômio qualquer $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é uma combinação linear dos polinômios em B (os coeficientes da combinação são os coeficientes do polinômio, a saber os escalares $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$). Assim, B gera $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Por outro lado, B é LI. De fato, uma combinação linear $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$ dos polinômios em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dando o polinômio nulo (vetor nulo em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$), isto é,

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

implica que $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Assim, B é um conjunto LI que gera $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e, portanto, uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

EXEMPLO 15

Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de todos os polinômios de uma variável real com coeficientes reais. O subconjunto

$$B = \{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\},$$

de todos os monômios é uma base de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Esta base contém uma infinidade de vetores. Não existe uma base finita em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$!

Apesar de todo espaço vetorial, inclusive os de dimensão-infinita, ter uma base, nos limitaremos aos espaços vetoriais de dimensão-finita, ou seja, aqueles que são gerados por conjuntos finitos de vetores.

Essas duas propriedades são extremamente fundamentais para a álgebra linear. Conjuntamente, elas dizem que todo vetor do espaço é uma combinação linear dos vetores da base (pois eles geram o espaço) e que a combinação é única.

Para verificar esta última afirmação, suponha que $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja uma base de um espaço vetorial V e que um determinado vetor v de V possa ser escrito como $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ e também como $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n$. Subtraindo, membro a membro, estas igualdades, temos

$$0 = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \dots + (a_n - b_n)v_n.$$

Agora, a independência linear dos vetores assegura que cada coeficiente $a_i - b_i$ da combinação é igual a zero. Portanto, $a_i = b_i$ para todo i , e segue que há um, e apenas um, modo de escrever v como combinação dos vetores da base. Isso formalmente demonstra o seguinte teorema:

Teorema 7 (unicidade da representação em uma base): Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V , então cada vetor em V pode ser escrito da forma

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

de uma maneira única.



GUARDE BEM ISSO!

A definição 4 estabelece que uma base para um espaço vetorial é um conjunto de vetores tendo duas propriedades:

- 1) É linearmente independente
- 2) Gera o espaço.

A unicidade da representação nos permite entender o conceito de base como uma generalização para espaços vetoriais arbitrários dos conceitos de sistemas

de coordenadas no plano (espaço bidimensional ou $\mathbb{R}^2$) e no espaço (espaço tridimensional ou $\mathbb{R}^3$). Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 5 (coordenadas em relação a uma base): Se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V e se

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

é a expressão de um vetor v de V em termos da base B , então os escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ são chamados as **coordenadas de v em relação à base B** . O vetor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ em $\mathbb{R}^n$ constituído destas coordenadas é chamado **vetor de coordenadas de v em relação a B** e é denotado por

$$[v]_B = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Muitas vezes (e em particular quando estudamos mudança de base) é mais conveniente escrever o vetor de coordenadas de v em relação à base B como vetor coluna (matriz $n \times 1$). Nesse caso, dizemos também a matriz de coordenadas de v em relação à base B e temos

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Façamos agora um exercício.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1

Sejam $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, -1)$ e $v_3 = (1, 0, -1)$. Mostre que o conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e encontre o vetor de coordenadas do vetor $v = (-3, 1, 5)$ em relação à base B .

SOLUÇÃO:

Para mostrar que B gera $\mathbb{R}^3$, devemos mostrar que um vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ qualquer do $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como uma combinação linear

$$\alpha = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$$

dos vetores de B . Em termos de componentes, a equação vetorial acima é equivalente a

$$x_1(1, 1, 1) + x_2(1, -1, -1) + x_3(1, 0, -1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Igualando os componentes correspondentes, temos o sistema linear

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= \alpha_1 \\x_1 - x_2 &= \alpha_2 \\x_1 - x_2 - x_3 &= \alpha_3\end{aligned}$$

Assim, para mostrar que B gera $\mathbb{R}^3$, devemos mostrar que o sistema acima tem solução para qualquer escolha de $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Por outro lado, para mostrar que B é LI, devemos mostrar que a única solução de

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$$

é $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Novamente, expressando em termos de componentes, a verificação da independência linear reduz-se a mostrar que o sistema linear homogêneo

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\x_1 - x_2 &= 0 \\x_1 - x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

tem solução trivial. Note que os dois sistemas acima têm a mesma matriz dos coeficientes, que é quadrada. Desse modo, usando o teorema 5 (regra de Cramer) da aula 9 de fundamentos de álgebra, podemos provar simultaneamente que B é LI e que gera $\mathbb{R}^3$, demonstrando que a matriz comum

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

dos coeficientes dos dois sistemas tem determinante diferente de zero. Temos $\det(A) = 2$ (verifique isto) e, portanto, B é uma base do $\mathbb{R}^3$.

Finalmente, para obter as coordenadas do vetor $v = (-3, 1, 5)$ em relação à base B , devemos resolver o sistema

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \\x_1 - x_2 &= 1 \\x_1 - x_2 - x_3 &= 5\end{aligned}$$

Escalonando este sistema (deixamos os detalhes para você), temos

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \\-2x_2 - x_3 &= 4 \\-x_3 &= 4\end{aligned}$$

cuja solução (obtida por retrossubstituição) é $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = -4$. Portanto, o vetor de coordenadas de $v = (-3, 1, 5)$ em relação à base B é

$$[v]_B = [(-3, 1, 5)]_B = (1, 0, -4).$$



ATENÇÃO!

Vale ressaltar que a ordem dos elementos de uma base também influi nas coordenadas de um vetor em relação a esta base. Desse modo, ao considerarmos uma base, estaremos sempre subentendendo que ela seja ordenada, ou seja, que os vetores estão ordenados na ordem em que aparecem.

Evidentemente, as coordenadas de um vetor dependem da base, geralmente mudando de uma para outra base. O vetor de coordenadas do vetor $v = (-3, 1, 5)$, do exercício resolvido 1, na base canônica $B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ seriam $[v]_{B'} = [(-3, 1, 5)]_{B'} = (-3, 1, 5)$, diferente daquele na base B especificada no exercício.

Apesar de conterem uma infinidade de vetores, muitos espaços vetoriais são gerados por conjuntos finitos de vetores. Para um espaço desse tipo, podemos definir dimensão. Antes de formalizar esta definição, devemos apresentar

alguns resultados úteis.

No exemplo 12, afirmamos que qualquer subconjunto do $\mathbb{R}^2$ com mais de dois vetores é LD. Esse fato segue de um resultado mais geral que enunciamos no próximo teorema e cuja demonstração que pode ser encontrada em livros de álgebra linear é deixada como exercício.

Teorema 8: Seja V um espaço vetorial que é gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$. Então qualquer conjunto LI de vetores em V é finito e contém não mais que n vetores.

Uma importante consequência do teorema 8 é o corolário seguinte que permite definir dimensão.

Corolário 1: Se V é um espaço vetorial de dimensão-finita, então quaisquer duas bases de V tem o mesmo número (finito) de vetores.

DEMONSTRAÇÃO:

Uma vez que V é de dimensão-finita, ele tem uma base finita $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Agora, pelo teorema 8 toda base de V é finita e contém não mais que n vetores. Então, se $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ é outra base de V , $r \leq n$. Pelo mesmo argumento, $n \leq r$. Portanto, $r = n$.

À luz do corolário 1, o exemplo 13 que apresenta a base canônica do $\mathbb{R}^n$ tendo n vetores, permite concluir que todas as bases do $\mathbb{R}^n$ têm exatamente

n vetores. Assim, todas as bases do $\mathbb{R}^3$ (espaço ou espaço tridimensional) têm exatamente 3 vetores, todas as bases do $\mathbb{R}^2$ (plano ou espaço bidimensional) têm exatamente 2 vetores e todas as bases de $\mathbb{R}$ (reta ou espaço unidimensional) têm exatamente 1 vetor. Assim, para os espaços com os quais somos familiarizados, o número de vetores de uma base é o mesmo que a dimensão, sugerindo a seguinte definição.

Definição 6 (dimensão): A **dimensão** de um espaço vetorial V de dimensão-finita é número de vetores em uma base para V e será denotado por $\dim(V)$. Dizemos também que o espaço vetorial nulo tem dimensão zero.

Finalizaremos nossa aula mostrando como estão relacionadas as coordenadas de um vetor em duas bases distintas de um espaço vetorial. Mais precisamente, veremos como é possível encontrar as coordenadas de um vetor com relação a uma base sabendo-se suas coordenadas com relação a outra base. Nosso problema é então:

Problema da mudança de base: Seja V um espaço vetorial de dimensão-finita e sejam B e B' bases de V . Se mudarmos da base B para a base B' , qual a relação entre as coordenadas de um vetor $v \in V$ em relação a essas bases, ou seja, qual a relação entre o vetor $[v]_B$ de coordenadas de v em relação à base B (base velha) e o vetor $[v]_{B'}$ de coordenadas de v em relação à base B' (base nova)?

Para simplificar o nosso trabalho, trataremos do caso bidimensional ($\dim(V) = 2$). O caso n -dimensional ($\dim(V) = n$) é feito de modo similar. Suponha que $B = \{u_1, u_2\}$ e $B' = \{v_1, v_2\}$ bases de V . Como relacionar as coordenadas $[v]_B$ e $[v]_{B'}$ de um vetor $v \in V$ em relação a essas bases? Inicialmente, vamos obter os vetores de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha (por que isto é possível?). Suponhamos que eles sejam

$$[v_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ e } [v_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} v_1 &= au_1 + bu_2 \\ v_2 &= cu_1 + du_2 \end{aligned}.$$

Agora, se o vetor de coordenadas de um vetor qualquer v na nova base B' é

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

então

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2.$$

Podemos obter o vetor de coordenadas do vetor v na velha base B , substituindo as expressões de v_1 e v_2 na base B na última igualdade. Isto nos dá

$$v = x_1(au_1 + bu_2) + x_2(cu_1 + du_2)$$

ou seja,

$$v = (x_1a + x_2c)u_1 + (x_1b + x_2d)u_2.$$

Logo, o vetor de coordenadas de v na velha base B é

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1a + x_2c \\ x_1b + x_2d \end{bmatrix},$$

que, usando produto de matrizes, pode ser escrito como

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

ou ainda, usando o vetor de coordenadas de v na nova base B' ,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [v]_{B'}.$$

Esta última igualdade mostra que o velho vetor de coordenadas $[v]_B$ é obtido multiplicando o novo vetor $[v]_{B'}$ à esquerda pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

cujas colunas são os vetores de coordenadas dos vetores da base nova em relação à base velha.

De um modo mais geral, temos o seguinte teorema.

Teorema 9 (mudança de base): Seja V um espaço vetorial real n -dimensional ($\dim(V) = n$) e sejam $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ duas bases (ordenadas) de V . Então, existe uma única, e necessariamente invertível, matriz P de ordem n com entradas reais tal que

$$\text{i) } [v]_B = P[v]_{B'}$$

$$\text{ii) } [v]_{B'} = P^{-1}[v]_B$$

para todo vetor v em V . As colunas de P são os vetores de coordenadas dos vetores de B' em relação à base B , ou seja, são dadas por

$$P_j = [v_j]_B, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

O teorema 9 nos mostra como fazer a mudança de uma para outra base. A matriz P é denominada matriz de mudança de base de B' para B ou matriz de transição de B' para B . O teorema mostra ainda que a matriz P^{-1} , inversa de P faz a transição de B para B' . A demonstração formal do teorema 9 pode ser encontrada nos livros clássicos de Álgebra Linear (citamos, por exemplo, Anton e Rorres (2001)).

Nesta aula, vimos como gerar subespaços a partir de um conjunto de vetores e que é possível combinar subespaços por meio de algumas operações. Aprendemos, também, a determinar bases de um espaço vetorial e como fazer a transição de uma para outra base. Além desses, conhecemos alguns conceitos fundamentais, como o de dimensão de espaços vetoriais de dimensão-finita. Entretanto, devemos dizer que há ainda muito que se estudar sobre os espaços vetoriais, destacando alguns resultados interessantes a respeito dos conceitos que vimos.

Na próxima aula, veremos que é possível fazer transformações de espaços vetoriais em outros.



SAIBA MAIS!

Você pode aprofundar seus conhecimentos consultando as referências que citamos e/ou visitando páginas da internet. Abaixo listamos algumas páginas interessantes que podem ajudá-lo nessa pesquisa:

1. <http://academic.ieee.org/docs/85>
2. <https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/>

AULA 4

Transformações Lineares - Parte I

Olá aluno(a),

Uma vez estabelecidos os conjuntos com uma propriedade interessante (no nosso caso, os espaços vetoriais, que são fechados para soma e para multiplicação por constante, dentre outras características), um caminho natural na Matemática é estudar as funções entre conjuntos desse tipo que preservam a propriedade interessante, de uma forma específica. Tais funções ganham, dessa forma, relevância e fornecem a continuação da teoria.

Em nossa quarta aula de Álgebra Linear, estudaremos as transformações lineares, detalhando e justificando suas principais propriedades.

Objetivos

- Definir as transformações lineares e suas principais propriedades
- Analisar subespaços relacionados a transformações lineares

TÓPICO 1

Definição e exemplos iniciais

OBJETIVO

- Definir transformação linear e analisar exemplos

Para bem começar o nosso estudo, temos a seguinte definição:

Dados os espaços vetoriais E e F , dizemos que a função $T: E \rightarrow F$ é uma **transformação linear** (ou *aplicação linear*) de E em F quando as seguintes duas propriedades forem satisfeitas para quaisquer $u, v \in E$ e para qualquer $k \in \mathbb{R}$:

- (i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
- (ii) $T(k.v) = k.T(v)$.

Assim, uma função entre dois espaços vetoriais é dita linear quando comuta com as operações de soma e de multiplicação por escalar.

Destaca-se que as operações à esquerda da igualdade são as do espaço E , enquanto as da direita são as do espaço F .

Uma vez que uma transformação linear é, antes de tudo, uma função, podemos usar a mesma terminologia do estudo das funções, de modo que, se tivermos $T: E \rightarrow F$, o conjunto E é chamado de **domínio** da transformação, enquanto F é o **contradomínio**.

EXEMPLO 1

Sabemos que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ são espaços vetoriais. Considere, então, a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$, de modo que f transforma cada par ordenado no número real que é a soma das coordenadas originais. Por exemplo, $f(3, 5) = 3 + 5 = 8$. A transformação f será linear se forem satisfeitas as condições (i) e (ii) descritas acima. Para a primeira verificação, devemos considerar dois elementos quaisquer do domínio – digamos (a, b) e (c, d) – que são maneiras genéricas de representar pares ordenados e comprovar que $f((a, b) + (c, d)) = f(a, b) + f(c, d)$. Para tanto, podemos começar desenvolvendo o primeiro membro da igualdade para tentar escrevê-lo de modo a ficar igual ao segundo membro. Acompanhe:

$$f((a, b) + (c, d)) = f(a + c, b + d) = a + c + b + d = a + b + c + d = f(a, b) + f(c, d).$$

Aqui usamos as propriedades de espaço vetorial destacadas nas últimas aulas e, é claro, a lei de formação da função f . Assim, provamos que f satisfaz a propriedade (i).

Outra maneira de proceder é desenvolver os dois membros separadamente e constatar que eles resultam em expressões iguais. Vejamos:

$$f((a, b) + (c, d)) = f(a + c, b + d) = a + c + b + d;$$

$$f(a, b) + f(c, d) = a + b + c + d.$$

Como os resultados são iguais, comprovamos, com mesma força, que $f((a, b) + (c, d)) = f(a, b) + f(c, d)$ e a propriedade (i) é satisfeita para f . A primeira maneira é mais sucinta, mas há situações nas quais não é evidente uma maneira de agrupar os termos de modo a obter explicitamente o que se quer. Assim, em alguns casos, a segunda maneira, embora mais extensa, pode ser mais simples.

Não devemos esquecer, porém, da segunda condição de linearidade, a qual, em geral, de imediata verificação. Considere, então, um elemento qualquer (a, b) do domínio e um número real k qualquer. Vale que:

$$f(k \cdot (a, b)) = f(k \cdot a, k \cdot b) = k \cdot a + k \cdot b = k \cdot (a + b) = k \cdot f(a, b).$$

Feitas as duas verificações, podemos afirmar que a função f dada é uma transformação linear.

EXEMPLO 2A

Para quaisquer espaços vetoriais E e F , a transformação $Z: E \rightarrow F$ dada por $Z(v) = 0_F, \forall v \in E$ é linear. Tal aplicação é chamada de *identicamente nula*.

EXEMPLO 2B

Para qualquer espaço vetorial E , a transformação $Id: E \rightarrow E$ dada por $Id(v) = v, \forall v \in E$ é linear. Tal aplicação é chamada de *identidade*.

EXEMPLO 3

A função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ não é linear, pois temos $g(3) = 9$ e $g(4) = 16$, enquanto $g(3+4) = g(7) = 49 \neq 25 = 9 + 16 = g(3) + g(4)$.

EXEMPLO 4

Usando as propriedades que conhecemos a respeito da transposição de matrizes, podemos verificar diretamente que a transformação $\varphi: M_2 \rightarrow M_2$ dada por $\varphi(X) = X^t$ é linear, pois, dadas as matrizes $A, B \in M_2$, temos $\varphi(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = \varphi(A) + \varphi(B)$. Além disso, para $k \in \mathbb{R}$ e $A \in M_2$, temos $\varphi(k.A) = (k.A)^t = k.A^t = k.\varphi(A)$.

Ao estudarmos subespaços vetoriais, exigimos que, além de serem fechados para a soma e para o produto por escalar, eles fossem não vazios ou, equivalentemente, que contivessem o elemento neutro para a soma. Uma vez que as transformações lineares são funções entre espaços vetoriais, é simples verificar que elas levam o elemento neutro do domínio no elemento neutro do contradomínio. Acompanhe a proposição a seguir:



ATENÇÃO!

É sensato verificar, antes de tudo, se a função está bem definida. Por exemplo, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem como domínio o conjunto de pares ordenados de números reais e tem como contradomínio o conjunto de triplas ordenadas de números reais, de modo que não pode ser definida por $g(x, y) = (x - y, x + y)$, pois, neste caso, temos como resultado um par ordenado, que não faz parte do contradomínio. Igualmente não podemos definir $h: M_{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(X) = \text{tr}(X)$, uma vez que o traço somente é definido para matrizes quadradas.



GUARDE BEM ISSO!

Denotaremos, por simplicidade, o conjunto de todas as transformações lineares de E em F por $L(E, F)$, de modo que $f \in L(A, B)$ significa que $f: A \rightarrow B$ é linear.



VOCÊ SABIA?

Quando, em uma transformação linear, um espaço vetorial é, simultaneamente, domínio e contradomínio, damos-lhe o nome de operador linear, ou seja, T é um operador linear sobre E se, e somente se, $T \in L(E, E)$. Assim, podemos dizer que a aplicação φ do exemplo 4 é um operador linear sobre M_2 .

Proposição: Se $T \in L(E, F)$, então $T(0_E) = 0_F$.

Demonstração: Podemos escrever $0_E = v + (-v)$ para qualquer elemento $v \in E$. Assim, pela linearidade, teremos $T(0_E) = T(v + (-v)) = T(v) + T(-v) = T(v) - T(v) = 0_F$, como desejado.

VOCÊ SABIA?

Quando o contradomínio de uma transformação linear é $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais, damos-lhe o nome de funcional linear, ou seja, T é um operador linear sobre E se, e somente se, $T \in L(E, \mathbb{R})$. Assim, podemos dizer que a aplicação $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ do exemplo 1 é um funcional linear sobre $\mathbb{R}^2$.

Podemos usar a proposição acima para rapidamente obter um contraexemplo que ateste que certas funções não são lineares. Considere, por exemplo, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 5$. Como $f(0) = 5 \neq 0$, temos, usando a contrapositiva da proposição acima, que f não é linear.

Uma vez que combinações lineares de elementos de um espaço vetorial são obtidas a partir de multiplicações por escalares e somas entre elementos, as transformações lineares podem ser caracterizadas como aquelas que preservam combinações lineares. Mais

exatamente, se $v_1, v_2, \dots, v_n \in E$ e $T: E \rightarrow F$ é uma transformação linear, para qualquer combinação linear $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ vale

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) = T(a_1v_1) + T(a_2v_2) + \dots + T(a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \dots + a_nT(v_n)$$

Assim, se soubermos como uma transformação linear age em uma base (ou simplesmente em um conjunto de geradores) do domínio, poderemos, escrevendo-se cada elemento como combinação linear dos elementos dados, encontrar qualquer imagem pedida.

VOCÊ SABIA?

A recíproca da proposição acima não é válida, pois há funções que levam zero em zero e não são lineares, como a do exemplo 3.

EXEMPLO 4

A transformação linear $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é tal que $f(1,0) = (2,5)$ e $f(0,1) = (1,-2)$. Nessas condições, encontre $f(3,4)$.

SOLUÇÃO:

Já que sabemos como a transformação age nos elementos de uma base, especificamente a

canônica, de $\mathbb{R}^2$, podemos escrever $(3,4)$ como combinação linear de $(1,0)$ e $(0,1)$ e, em seguida, usando a linearidade, determinar sua imagem. Uma vez que vale a igualdade $(3,4) = 3.(1,0) + 4.(0,1)$, podemos fazer:

$$\begin{aligned} f(3,4) &= f(3.(1,0) + 4.(0,1)) = \\ &= 3.f(1,0) + 4.f(0,1) = \\ &= 3.(2,5) + 4.(1,-2) = \\ &= (6,15) + (4,-8) = (10,7). \end{aligned}$$

Uma maneira alternativa de resolver o problema seria escrever de forma genérica um elemento do domínio como combinação linear dos elementos apresentados e usar a linearidade para achar a expressão da função, substituindo o par dado apenas no final do processo.

Como $(x,y) = x.(1,0) + y.(0,1)$, podemos repetir as contas, agora de forma geral:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x.(1,0) + y.(0,1)) = \\ &= x.f(1,0) + y.f(0,1) = \\ &= x.(2,5) + y.(1,-2) = \\ &= (2x, 5x) + (y, -2y) = (2x + y, 5x - 2y). \end{aligned}$$

Assim, $f(x,y) = (2x + y, 5x - 2y)$ e, por substituição direta, obtemos o mesmo resultado.

EXEMPLO 5

Se $T: P_2 \rightarrow P_2$ é a transformação linear tal que $T(x^2 - 4) = 3x - 1$ e $T(x - 2) = x^2 + 1$, encontre $T(x^2 - 7x + 10)$.

SOLUÇÃO:

Lembremos que P_2 é o espaço vetorial formado pelos polinômios de coeficientes reais e grau menor ou igual a dois, juntamente com o polinômio identicamente nulo. A dimensão de P_2 é 3 e, portanto, uma base sua deve conter obrigatoriamente três elementos, de forma que o problema parece incompleto. Observe, porém, que não se deseja saber a expressão geral da função, nem como ela age em muitos elementos do domínio, e sim em um polinômio bem particular. Se $p(x) = x^2 - 7x + 10$ puder ser escrito como combinação linear dos polinômios dados, o problema pode ser resolvido. Tentemos, então, encontrar números reais a e b para os quais se tenha $x^2 - 7x + 10 = a.(x^2 - 4) + b.(x - 2)$, que é equivalente

$$\text{a } x^2 - 7x + 10 = ax^2 + bx - 4a - 2b \text{ e gera o sistema } \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ -4a - 2b = 10 \end{cases}, \text{ que é possível}$$

e determinado. Sua solução é $a = 1$ e $b = -7$, ou seja, escrevendo $x^2 - 7x + 10 = 1.(x^2 - 4) + (-7).(x - 2)$ e usando a linearidade da aplicação, podemos encontrar:

$$\begin{aligned} T(x^2 - 7x + 10) &= T(1.(x^2 - 4) + (-7).(x - 2)) = \\ &= 1.T(x^2 - 4) - 7.T(x - 2) = \\ &= 1.(3x - 1) - 7.(x^2 + 1) = \\ &= -7x^2 + 3x - 8. \end{aligned}$$

Obviamente, apenas com o que foi fornecido, não podemos encontrar $T(p(x))$ para um polinômio $p(x)$ que não está no espaço gerado por $x^2 - 4$ e $x - 2$.

Assim, uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais é uma função compatível com as operações definidas no espaço e, se soubermos como ela age nos elementos de uma base do domínio, saberemos como encontrar a imagem de qualquer elemento.

TÓPICO 2

Núcleo e injetividade

OBJETIVO

- Verificar a injetividade de uma transformação linear a partir de um subespaço específico a ela relacionado

As transformações lineares são funções e, portanto, podemos investigar-lhes algumas propriedades referentes a funções em geral, como injetividade e sobrejetividade. Neste tópico, estudaremos um conjunto especial, ao qual daremos um nome especial, e que servirá para, de maneira objetiva, determinar se uma transformação linear é injetiva.

Definição: Chamamos de **Núcleo** de uma transformação linear o conjunto dos elementos do domínio que têm como imagem o zero do contradomínio. Tal conjunto pode ser interpretado como o conjunto de raízes da transformação. Mais precisamente, dada a transformação linear $T: E \rightarrow F$, o núcleo de T é o conjunto $N(T) = \{v \in E; T(v) = 0\}$.

EXEMPLO 1

Para a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$, obtemos, pelo cálculo direto, que $T(3, 3) = (0, 0)$, de onde podemos escrever $(3, 3) \in N(T)$. Além disso, como $T(5, 1) = (4, 8)$, vale $(5, 1) \notin N(T)$.

VOCÊ SABIA?

Em alguns textos de Álgebra Linear, o núcleo de uma transformação linear é chamado de *Kernel*, e representado por $\text{Ker}(T)$.

Da teoria desenvolvida nas últimas aulas, vimos a importância do elemento neutro em várias propriedades dos espaços vetoriais. Por isso, quando trabalhamos com transformações lineares, o conjunto dos elementos do domínio que têm esse elemento neutro como imagem é, também, importante. Como veremos adiante, o núcleo tem várias características relevantes, dentre as quais ser ele mesmo um subespaço vetorial do domínio.

Proposição: O núcleo da transformação linear $T : E \rightarrow F$ é um subespaço de E .

Demonstração: Para que fique provado que um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço vetorial, devemos verificar que ele não é vazio, que é fechado para a soma e que é fechado para a multiplicação por escalares. Inicialmente, como provado no tópico anterior, $T(0) = 0$ para qualquer transformação linear, assim, garantimos que pelo menos $0 \in N(T)$, ou seja, $N(T) \neq \emptyset$. Vejamos as outras condições:

(i) se $u, v \in N(T)$, vale, pela definição, que $T(u) = 0$ e $T(v) = 0$. Usando a linearidade de T , podemos fazer $T(u + v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0$, assim $u + v \in N(T)$.

(ii) semelhantemente, com $v \in N(T)$, vale que $T(v) = 0$. Para qualquer real k , temos $T(k.v) = k.T(v) = k.0 = 0$ e, assim, $k.v \in N(T)$.

Verificada a proposição acima, tem sentido falarmos de combinação linear dos elementos do núcleo, sabendo que o resultado fará parte do núcleo. Além disso, podemos falar da dimensão do núcleo, que não pode, naturalmente, exceder a dimensão do domínio.

Relembremos que uma função $f : A \rightarrow B$ é *injetiva* (ou injetora) se elementos diferentes do domínio sempre tiverem imagens diferentes no contradomínio, ou de forma equivalente, dois elementos só possuem a mesma imagem se forem iguais, ou seja: f é injetiva se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Para transformações lineares, a injetividade pode ser verificada através de uma análise do núcleo, como explicado a seguir:

Proposição: A transformação linear $T: E \rightarrow F$ é injetiva se, e somente se, $N(T) = \{0\}$, caso em que dizemos que possui núcleo *trivial*.

Demonstração: Suponhamos, inicialmente, que T seja injetiva e $v \in N(T)$, isto é, $T(v) = 0$. Uma vez que, para qualquer transformação linear vale $T(0) = 0$, podemos colocar $T(v) = T(0)$ e, pela injetividade, obtemos $v = 0$, de forma que, assim, 0 é o único elemento do núcleo. Reciprocamente, suponha que $N(T) = \{0\}$. Temos $T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = 0 \Rightarrow T(u - v) = 0$. Por hipótese, o núcleo é trivial, logo $u - v = 0$ e, dessa forma, $u = v$, o que prova a injetividade da transformação.

Assim, quando o núcleo não for trivial, a transformação não será injetiva. A função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - y, 2x - 2y)$, como no exemplo 1, não é injetiva.

EXEMPLO 2

Verifique se a transformação $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(x, y) = (x + 3y, 2x - y)$ é injetiva.

SOLUÇÃO:

Poderíamos usar a definição de injetividade, mas isso demandaria muito gasto de tempo (e de incógnitas!). É simples verificar que h é linear, de onde podemos usar a proposição acima para testar se ela é injetiva.

Para tanto, basta que concluamos que o único elemento do núcleo é o zero. Seja, então $(x, y) \in N(h)$, isto é, $h(x, y) = (0, 0)$. Para tal, devemos ter a igualdade $(x + 3y, 2x - y) = (0, 0)$, que gera o sistema
$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$
, que é linear e homogêneo.

Resolvendo-o, obtemos apenas a solução $x = y = 0$, de modo que, nesses termos, o núcleo de h é trivial e, assim, h é injetiva.



GUARDE BEM ISSO!

Deve-se ter bem claramente que a proposição acima descreve uma propriedade das funções lineares, não podendo ser usada para outros tipos de funções. Por exemplo, para a função real de variável real $f(x) = x^2$, temos $f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$, entretanto, ela não é injetiva.

EXEMPLO 3

Considere a função $G: P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(p(x)) = p(3)$, que transforma polinômios nos valores numéricos correspondentes quando a variável é substituída por 3, por exemplo, $G(x^2 + 8) = 17$ e $G(x^2 - x - 1) = 5$. Não é complicado verificar que G é linear. Passemos ao estudo do núcleo. Seja, então $N(G) = \{p(x) \in P_2; G(p(x)) = 0\}$. A condição $G(p(x)) = 0$ é equivalente a $p(3) = 0$, de forma que $N(G)$ é formado por todos os polinômios de P_2 que têm o número 3 como raiz. Uma vez que $x^2 - 9$ é um tal polinômio, temos que o núcleo não é trivial e, portanto, a aplicação dada não é injetiva. Além disso, temos aqui uma maneira alternativa de provar que $H = \{p \in P_2; p(3) = 0\}$ é um subespaço vetorial de P_2 .

Mais geralmente, fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos considerar a aplicação $G: P_n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(p(x)) = p(x_0)$ e repetir os mesmos passos para mostrar que os polinômios de P_n que têm x_0 como raiz formam um subespaço vetorial de P_n .

Uma propriedade relevante das transformações linear e injetiva é que elas levam conjuntos linearmente independentes em conjuntos linearmente independentes. Mais especificamente, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema: Se $T: E \rightarrow F$ é uma função linear injetiva e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset E$ é um conjunto linearmente independente, então o conjunto $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\} \subset F$ também é linearmente independente.

DEMONSTRAÇÃO:

Para verificarmos que um conjunto é linearmente independente, devemos fazer uma combinação linear de todos os seus elementos resultando em zero e concluir que todos os coeficientes devem ser nulos. Começemos, então por

$$a_1.T(v_1) + a_2.T(v_2) + \dots + a_n.T(v_n) = 0.$$

Como T é linear, preserva combinações lineares, de onde podemos concluir que

$$T(a_1.v_1 + a_2.v_2 + \dots + a_n.v_n) = 0.$$

Sendo T injetiva, seu núcleo é trivial, assim o elemento dentro dos parênteses da expressão acima deve ser 0, ou seja:

$$a_1.v_1 + a_2.v_2 + \dots + a_n.v_n = 0.$$

Mas, como o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente, os coeficientes dessa combinação devem ser todos nulos. Assim $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, o que conclui a demonstração.

Corolário: Se a transformação linear $T : E \rightarrow F$ é injetiva, então $\dim E \leq \dim F$.

Demonstração: Considere $n = \dim E$ e $m = \dim F$. Pela definição de dimensão, há um conjunto linearmente independente de E com n elementos, digamos $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Pelo teorema anterior, usando a injetividade da transformação, sabemos que $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é, também, linearmente independente e, como a quantidade máxima de elementos de F que podem formar um conjunto linearmente independente é m , concluímos que $n \leq m$.

EXEMPLO 4

Uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow P_2$ não pode ser injetiva, pois $\dim \mathbb{R}^4 = 4 > 3 = \dim P_2$.

O resultado acima não garante a injetividade no caso de a dimensão do domínio ser menor ou igual ao do contradomínio, caso em que alguma análise mais aprofundada deve ser feita. Assim, por exemplo, uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ pode ser injetiva, mas nenhuma conclusão a respeito desse fato deve ser tirada apenas pela comparação entre as dimensões.

TÓPICO 3

Imagem e Sobrejetividade

OBJETIVO

- Verificar a sobrejetividade de uma transformação linear através de um subespaço específico a ela relacionado

Assim como podemos avaliar se uma transformação linear, como função, é injetiva, podemos falar de sobrejetividade. Para tanto, estudaremos o subconjunto do contradomínio formado pelas imagens dos elementos do domínio pela aplicação.

Definição: Chamamos de **Imagem** de uma transformação linear o subconjunto do contradomínio formado pelos elementos aos quais a transformação associa um elemento do domínio. Mais precisamente, dada a transformação linear $T : E \rightarrow F$, a imagem de T é o conjunto $\text{Im}(T) = \{v \in F; \exists w \in E, T(w) = v\}$.

A definição acima é apenas uma revisitação do conceito já estudado na teoria geral de funções. Para o nosso estudo de transformações lineares, a imagem vai desempenhar papel relevante, porque, dentre outras coisas, é um subespaço vetorial do contradomínio, como provado a seguir.

EXEMPLO 1A

Para a transformação linear $f : M(2,2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(X) = \text{tr}(X)$, todos os números reais fazem parte da imagem, pois, dado $x \in \mathbb{R}$, temos pelo menos

$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M(2,2)$ com $f(A) = x$. Assim, escrevemos $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

EXEMPLO 1B

Para a transformação linear $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (x + y, x + y)$, observa-se, por exemplo, que $g(2, 3) = (5, 5)$, logo $(5, 5) \in \text{Im}(g)$. Se tentarmos encontrar um par (x, y) tal que $g(x, y) = (2, 3)$, obteríamos $(x + y, x + y) = (2, 3)$, que gera, claramente, um sistema impossível, de modo que $(2, 3) \notin \text{Im}(h)$. De forma mais geral, a equação $g(x, y) = (a, b)$ tem solução se, e somente se, $a = b$, de modo que a imagem de h é formada pelos pares ordenados com coordenadas iguais, isto é, $\text{Im}(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$.

Relembremos que uma função $f: A \rightarrow B$ é *sobrejetiva* (ou *sobrejetora*) se qualquer elemento do contradomínio for associado a pelo menos um elemento do domínio, ou de forma equivalente, se a imagem for igual ao contradomínio. Para o devido destaque das funções que estamos trabalhando:

Definição: A aplicação linear $T: E \rightarrow F$ é sobrejetiva se, e somente se, $\text{Im}(T) = F$

Assim, a aplicação $f: M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(X) = \text{tr}(X)$, no exemplo 1a, é sobrejetiva, enquanto a aplicação $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (x + y, x + y)$, no exemplo 1b, não o é.

Proposição: A imagem da transformação linear $T: E \rightarrow F$ é um subespaço de F .

Demonstração: Inicialmente, como $T(0) = 0$ para qualquer transformação linear, temos que $0 \in \text{Im}(T)$, ou seja, $\text{Im}(T) \neq \emptyset$. Além disso, se $u, v \in \text{Im}(T)$, existem, pela definição, elementos $w_1, w_2 \in E$, tais que $T(w_1) = u$ e $T(w_2) = v$. Como E é espaço vetorial, então $w_1 + w_2 \in E$ e, usando a linearidade de T , vale $T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2) = u + v$. Logo $u + v \in \text{Im}(T)$. Analogamente, para qualquer real k , se $v \in \text{Im}(T)$, vale $T(w) = v$, para algum $w \in E$. De novo, usando o fato de que E é um espaço vetorial, vale $k.w \in E$, mas $T(k.w) = k.T(w) = k.v$, de modo que $k.v \in \text{Im}(T)$ e a demonstração fica completa.

EXEMPLO 2

Se o funcional linear $h: E \rightarrow \mathbb{R}$ não for identicamente nulo, ele será sobrejetivo, pois a imagem deve ser um subespaço do contradomínio, mas $\dim \mathbb{R} = 1$, de modo que seus subespaços têm dimensão 0 ou 1. Como estamos supondo a aplicação não

identicamente nula, não se tem $\dim \text{Im}(h) = 0$. Logo $\dim \text{Im}(h) = 1 = \dim \mathbb{R}$ e, como $\text{Im}(h) \subset \mathbb{R}$, podemos concluir $\text{Im}(h) = \mathbb{R}$.

Como visto no tópico anterior, as transformações lineares injetivas mantêm a propriedade de independência linear dos conjuntos. Para as transformações lineares sobrejetivas, a propriedade mantida é a de gerar o espaço. Vejamos:

Teorema: Se $T: E \rightarrow F$ é uma transformação linear sobrejetiva e $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset E$ é um conjunto de geradores de E , ou seja, se todo elemento de E puder ser escrito como combinação linear dos v_i , então $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\} \subset F$ é um conjunto de geradores de F .

DEMONSTRAÇÃO:

Para verificarmos que um conjunto gera um espaço, devemos provar que qualquer elemento desse espaço pode ser escrito como combinação linear dos elementos do conjunto dado. Considere, então, $w \in F$. Pela sobrejetividade da aplicação, existe $v \in E$ tal que $T(v) = w$. Mas como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ gera E , existem números reais $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ de modo que v pode ser escrito como a combinação linear $v = a_1.v_1 + a_2.v_2 + \dots + a_n.v_n$.

Portanto, fazendo uso da linearidade de T

$$\begin{aligned} w &= T(v) = \\ &= T(a_1.v_1 + a_2.v_2 + \dots + a_n.v_n) = \\ &= a_1.T(v_1) + a_2.T(v_2) + \dots + a_n.T(v_n). \end{aligned}$$

Dessa feita, qualquer $w \in F$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$, que era o resultado desejado.

Corolário: Se a transformação linear $T: E \rightarrow F$ é sobrejetiva, então $\dim E \geq \dim F$.

Demonstração: De maneira semelhante ao feito no final do tópico 2, considere $n = \dim E$ e $m = \dim F$. Pela definição de dimensão, há um conjunto de geradores de E com n elementos, digamos $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Pelo teorema anterior, usando a sobrejetividade da aplicação, sabemos que $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é um conjunto de geradores de F , mas a dimensão é também a quantidade mínima de elementos que podem formar um conjunto de geradores. Portanto $n \geq m$.

EXEMPLO 3

Uma aplicação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2,2)$ não pode ser sobrejetiva, pois $\dim \mathbb{R}^3 = 3 < 4 = \dim M(2,2)$.

Adaptando o que foi dito no final do tópico anterior, o resultado acima não garante a sobrejetividade no caso de a dimensão do domínio ser maior ou igual ao do contradomínio, caso em que alguma análise mais aprofundada deve ser feita. Assim, por exemplo, uma aplicação linear $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *pode* ser sobrejetiva, mas nenhuma conclusão a respeito desse fato deve ser tirada apenas pela comparação entre as dimensões.

TÓPICO 4

Isomorfismos

OBJETIVOS

- Associar as ideias de injetividade e sobrejetividade
- Verificar quando dois espaços são equivalentes do ponto de vista da linearidade

Por fim, temos também para funções em geral o conceito de bijetividade, que ocorre quando injetividade e sobrejetividade acontecem simultaneamente, caso em que a função admite inversa. Para as transformações lineares que satisfazem essa propriedade, temos, como é de praxe, um nome especial.

Definição: Uma transformação linear é chamada de **isomorfismo** quando for injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo, isto é, $T : E \rightarrow F$ é um isomorfismo se as três condições abaixo forem satisfeitas:

- (i) $T \in L(E, F)$;
- (ii) $N(T) = \{0\}$;
- (iii) $\text{Im}(T) = F$.

Em outras palavras, os isomorfismos são as transformações lineares que possuem inversa.

EXEMPLO 1

A aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5x$ é um isomorfismo, pois

(i) $f(x + y) = 5(x + y) = 5x + 5y = f(x) + f(y)$ e $f(k.x) = 5k.x = k.f(x)$, logo ela é linear.

(ii) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, então $N(f) = \{0\}$, logo é injetiva.

(iii) para qualquer número real y , vale $f(y/5) = 5.(y/5) = y$, assim $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ e temos a sobrejetividade.

Pelo que foi discutido sobre dimensão no final dos tópicos anteriores, podemos concluir que isomorfismos somente podem ocorrer entre espaços vetoriais de mesma dimensão, pois, para que uma transformação linear $T: E \rightarrow F$ seja injetiva, devemos ter $\dim E \leq \dim F$ e a sobrejetividade acarreta $\dim E \geq \dim F$, de modo que, para que as duas desigualdades ocorram simultaneamente, é exigido que $\dim E = \dim F$.

EXEMPLO 2A

Não há isomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, pois tal função, sendo linear, não pode ser injetiva.

EXEMPLO 2B

Não há isomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, pois tal função, sendo linear, não pode ser sobrejetiva.

EXEMPLO 2C

Embora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ seja injetiva e sobrejetiva, falha na linearidade, não sendo um isomorfismo.

Os isomorfismos, como bijeções, são aplicações que possuem inversa. Sabemos da teoria de funções, que a inversa de uma bijeção é uma bijeção, de modo que, se quisermos mostrar que a inversa de um isomorfismo é também um isomorfismo, basta provar que é uma aplicação linear. Considere, então, o isomorfismo $\varphi: E \rightarrow F$ e sua inversa $\varphi^{-1}: F \rightarrow E$. Para $u, v \in F$, sejam $u_0, v_0 \in E$ tais que $\varphi^{-1}(u) = u_0$ e $\varphi^{-1}(v) = v_0$, que são condições equivalentes a $\varphi(u_0) = u$ e $\varphi(v_0) = v$. Pela linearidade de φ , vale $\varphi(u_0 + v_0) = \varphi(u_0) + \varphi(v_0) = u + v$, ou seja, $\varphi^{-1}(u + v) = u_0 + v_0 = \varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)$, o que demonstra que φ^{-1} preserva a operação de soma. Para que se prove que também o produto por escalar é preservado, podemos usar um artifício semelhante.

EXEMPLO 3

Considere a função $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x, y) = (3x + 5y, 2x + 3y)$. Um caminho para provar que φ é um isomorfismo é descrito a seguir:

(1) Verificar se φ é linear.

(i) Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, observe que

$$\begin{aligned}\varphi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \varphi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= (3(x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2)) = \\ &= (3x_1 + 5y_1 + 3x_2 + 5y_2, 2x_1 + 3y_1 + 2x_2 + 3y_2) = \\ &= (3x_1 + 5y_1, 2x_1 + 3y_1) + (3x_2 + 5y_2, 2x_2 + 3y_2) = \\ &= \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_2).\end{aligned}$$

(ii) Dados $(x, y) \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R}$, observe que

$$\begin{aligned}\varphi(k \cdot (x, y)) &= \varphi(kx, ky) = \\ &= (3kx + 5ky, 2kx + 3ky) = \\ &= (k \cdot (3x + 5y), k \cdot (2x + 3y)) = \\ &= k \cdot (3x + 5y, 2x + 3y) = \\ &= k \cdot \varphi(x, y).\end{aligned}$$

(2) Verificar se φ é injetiva.

Analisando o núcleo de φ , considere o par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x, y) = (0, 0)$,

ou seja, $(3x + 5y, 2x + 3y) = (0, 0)$, que resulta no sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$, de onde

obtemos a única solução $x = y = 0$. Assim, $N(\varphi) = \{(0, 0)\}$, trivial.

(3) Verificar se φ é sobrejetiva.

Vejamos para quais pares $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ há solução para a igualdade $\varphi(x, y) = (a, b)$. Mas isso é equivalente a $(3x + 5y, 2x + 3y) = (a, b)$, ou seja, nas incógnitas x e y , temos o sistema $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x + 3y = b \end{cases}$, que possui solução $\begin{cases} x = -3a + 5b \\ y = 2a - 3b \end{cases}$, ou seja, é possível

para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Assim, $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$.

Dessa forma, temos que φ é um isomorfismo. Pelo feito em (3), temos também a sua inversa $\varphi^{-1}(a, b) = (-3a + 5b, 2a - 3b)$.

Aqui encerramos a nossa primeira aula sobre transformações lineares. É importante que as definições fiquem claras para o bom desenvolvimento do curso e para a continuação da teoria. Na aula 5, veremos como relacionar transformações lineares com matrizes bem como uma relação interessante entre as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação.

AULA 5

Transformações lineares - Parte II

Olá aluno(a),

Dando prosseguimento aos estudos das transformações lineares entre espaços vetoriais, em nossa quinta aula de Álgebra Linear, veremos dois tópicos significativos: a matriz de uma transformação linear e o Teorema do Núcleo e da Imagem.

Objetivos

- Analisar as propriedades da forma matricial de uma transformação linear
- Relacionar a dimensão da imagem e do núcleo de uma transformação linear

TÓPICO 1

A matriz de uma transformação linear

OBJETIVO

- Escrever uma transformação linear como produto por matriz

Na aula 4, vimos que uma função f entre espaços vetoriais é linear quando é compatível com as operações de soma e de produto por escalar, isto é, quando, para quaisquer elementos u, v do domínio e para qualquer número real k , valerem $f(u + v) = f(u) + f(v)$ e $f(k.v) = k.f(v)$.

Dentre outras informações relevantes, vimos que uma transformação linear fica bem determinada quando sabemos como ela age nos elementos de uma base (ou simplesmente em um conjunto de geradores) do domínio.

EXEMPLO 1

Considere a aplicação $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (3x - 2y, x + 4y)$. É simples verificar que f é linear. Se representarmos os elementos de $\mathbb{R}^2$ como vetores-coluna, podemos escrever, equivalentemente, $f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ x + 4y \end{bmatrix}$ ou ainda, usando as propriedades de multiplicação de matrizes, $f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

No exemplo anterior, podemos encontrar a imagem de um par ordenado pela substituição direta da expressão $f(x, y) = (3x - 2y, x + 4y)$ ou, se escrevermos os elementos de $\mathbb{R}^2$ como $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, teremos $f(X) = A.X$, em que

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Assim, a função fica completamente caracterizada pela matriz A , se

considerarmos os elementos da base escritos como colunas (usando a base canônica).

Geralmente, pelo que vimos nas aulas anteriores, dada uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ do espaço vetorial E , qualquer elemento $v \in E$ pode ser escrito como $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, com coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Nestes termos, podemos também escrever

$$v = (a_1, a_2, \dots, a_n)_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_B$$

A proposição a seguir mostra que, se tomarmos os elementos de um espaço vetorial de dimensão finita escritos como acima e mantendo as operações matriciais, o produto matricial gerará uma transformação linear. Mais à frente, veremos que todas as transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita poderão ser expressos desta forma.

Proposição: Fixada a matriz $A \in M_{m \times n}$, a função $f: M_{n \times 1} \rightarrow M_{m \times 1}$ dada por $f(X) = A.X$ é uma transformação linear.

DEMONSTRAÇÃO:

Aqui basta usar as propriedades das operações entre matrizes. Dadas $X, Y \in M_{n \times 1}$, tem-se

$$f(X + Y) = A.(X + Y) = A.X + A.Y = f(X) + f(Y).$$

Além disso, se $k \in \mathbb{R}$ e $X \in M_{n \times 1}$, vale

$$f(k.X) = A.k.X = k.A.X = k.f(X).$$

Assim, temos que f é linear.

EXEMPLO 2A

Considere a função $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y, 2x + 3z)$. Se expressarmos os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vetores-coluna (na base canônica), podemos reescrever

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + z \\ x + 2y \\ 2x + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

De modo que, se fixarmos $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e a notação $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ para elementos

quaisquer de $\mathbb{R}^3$, temos que $T(X) = A.X$, de onde concluímos diretamente que T é linear.

EXEMPLO 2B

Verifique se a função $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y, 2x + 3z)$ é um isomorfismo.

SOLUÇÃO:

Como já sabemos que T é linear, resta testar se T é injetiva e sobrejetiva. A primeira verificação pode ser feita pela análise do núcleo. Usando a notação estabelecida no item anterior, podemos escrever

$$N(T) = \{X \in \mathbb{R}^3; T(X) = 0\}$$

Mas $T(X) = 0$ é equivalente a $A.X = 0$, na qual o “zero” do segundo membro é a matriz nula 3×1 . Uma vez que a matriz A possui inversa (seu determinante é não nulo, como pode ser facilmente verificado), podemos, pela multiplicação de A^{-1} à esquerda de ambos os membros da igualdade, concluir que $A^{-1}.A.X = A^{-1}.0$, ou seja, $X = 0$. Assim, o núcleo é trivial e, conseqüentemente, a aplicação dada é injetiva.

Para a sobrejetividade, estudemos a imagem de T , isto é, vejamos para quais elementos $W \in \mathbb{R}^3$, existe solução para $T(X) = W$, que equivale a $A.X = W$.

Da mesma forma, multiplicando à esquerda pela inversa de A , obtemos $X = A^{-1}.W$, isto é, a equação $T(X) = W$ possui solução para qualquer $W \in \mathbb{R}^3$, de onde obtemos que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$ e, assim, a aplicação dada é sobrejetiva. Logo T é um isomorfismo.

EXEMPLO 3

Verifique que a aplicação $F: P_2 \rightarrow P_1$ dada por $F(ax^2 + bx + c) = (a + b)x + a + c$ é linear.

SOLUÇÃO:

Aqui, usaremos as bases canônicas $B = \{1, x, x^2\}$ de P_2 , e $C = \{1, x\}$ de P_1 .

Nestes termos, reescrevemos $F \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} a + b \\ a + c \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_B$, no qual os índices

poderiam ter sido suprimidos. Assim, para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, e escrevendo

$[p(x)] = [ax^2 + bx + c] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, teremos $F(p(x)) = A \cdot [p(x)]$, e como escrevemos como

produto matricial, concluímos que F é linear.

A forma matricial de uma transformação linear é muito prática, como o exemplo 2 sugere, de modo que, se todas as transformações lineares pudessem ser escritas assim, o caso de verificar se uma função entre espaços vetoriais é um isomorfismo se restringiria a determinar se uma matriz possui inversa, ou seja, se seu determinante é diferente de zero. A boa notícia é que toda transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita pode, sim, ser escrita matricialmente, bastando para isso que definamos bases para o domínio e para o contradomínio da função. O teorema a seguir trata disso.

DEMONSTRAÇÃO:

Considere $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$, isto é, $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_B$.

Como C é uma base para F , podemos escrever as imagens de cada um dos elementos de B como segue:

$\varphi(v_1) = b_{11}w_1 + b_{21}w_2 + \dots + b_{m1}w_m$, ou em forma de vetor coluna: $\varphi(v_1) = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}_C$.

$\varphi(v_2) = b_{12}w_1 + b_{22}w_2 + \dots + b_{m2}w_m$, ou em forma de vetor coluna: $\varphi(v_2) = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{m2} \end{bmatrix}_C$.

Seguindo a mesma lógica até o último elemento da base, temos

$\varphi(v_n) = b_{1n}w_1 + b_{2n}w_2 + \dots + b_{mn}w_m$, ou em forma de vetor coluna: $\varphi(v_n) = \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{bmatrix}_C$.

Agora, como $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$, podemos escrever usando a linearidade da função:

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) = \\ &= a_1\varphi(v_1) + a_2\varphi(v_2) + \dots + a_n\varphi(v_n) \end{aligned}$$

A partir daí, obtemos

$$\varphi(v) = a_1 \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix}_C + a_2 \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \dots \\ b_{m2} \end{bmatrix}_C + \dots + a_n \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \dots \\ b_{mn} \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + \dots b_{1n}a_n \\ b_{21}a_1 + b_{22}a_2 + \dots b_{2n}a_n \\ \dots \\ b_{m1}a_1 + b_{m2}a_2 + \dots b_{mn}a_n \end{bmatrix}_C.$$

Usando a definição de produto matricial, podemos escrever também

$$\varphi(v) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}_B,$$

Assim, se definirmos $A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$, teremos que a aplicação pode ser dada por

$$\varphi[v]_B = A \cdot [v]_B.$$

A unicidade da matriz A vem da unicidade de representação de um elemento em uma determinada base.

Pelo que vimos no teorema acima, podemos encontrar a matriz de uma transformação em relação a quaisquer bases do domínio e do contradomínio. Além disso, as colunas da matriz são formadas pelos coeficientes obtidos quando escrevemos as imagens dos elementos da base do domínio na base do contradomínio.

EXEMPLO 4

A transformação linear $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (3x - 2y, 5x + y)$ é tal que $f(1, 0) = (3, 5) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, e esta será a primeira coluna da matriz de f em relação

à base canônica de $\mathbb{R}^2$ (aqui consideramos a mesma base tanto para o domínio quanto para o contradomínio, por simplicidade). Também temos $f(0, 1) = (-2, 1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, que é a segunda coluna, assim, a matriz de f em relação à base canônica é $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, podemos analisar as propriedades de f , tais

como injetividade e sobrejetividade, através da expressão $f(X) = A \cdot X$, em que X é um par ordenado escrito como vetor-coluna.

Por fim, se tivermos uma transformação linear $T: E \rightarrow F$, entre espaços de mesma dimensão, haverá uma matriz quadrada A para a qual $T(v) = A \cdot v$. O núcleo

de T é o conjunto $N(T) = \{v \in E; T(v) = 0\}$, mas $T(v) = 0$ é equivalente a $A.v = 0$. Se a A possuir inversa, podemos, pela multiplicação de A^{-1} à esquerda em ambos os membros da igualdade, concluir que $A^{-1}.A.v = A^{-1}.0$, ou seja, $v = 0$. Assim, o núcleo é trivial e, conseqüentemente, a aplicação dada é injetiva sempre que $\det A \neq 0$. Pela análise de soluções de um sistema de equações lineares, vemos que a recíproca é verdadeira, isto é, se $\det A = 0$, então o sistema admite uma solução diferente da trivial, de modo que a aplicação não é injetiva, ou seja, temos que a aplicação $T(v) = Av$ é injetiva se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Analogamente, se estudarmos a imagem de T , isto é, se analisarmos para quais elementos $w \in F$, existirá solução para $T(v) = w$, que equivale a $A.v = w$. Da mesma forma, multiplicando à esquerda pela inversa de A , caso exista, obteremos $v = A^{-1}.w$, isto é, a equação $T(v) = w$ possui solução para qualquer $w \in F$.

Em síntese, podemos fechar o tópico com a seguinte proposição:

Proposição: Considere $T \in L(E, F)$, com $\dim E = \dim F$, cuja matriz (em relação a algumas bases de E e F) é A . A aplicação T é um isomorfismo se, e somente se, $\det A \neq 0$.

TÓPICO 2

Argumento e forma trigonométrica

OBJETIVOS

- Definir argumento de um número complexo
- Relacionar argumento e módulo com a forma algébrica
- Apresentar a forma trigonométrica de um número complexo

Na aula passada, vimos que o núcleo de uma transformação linear é um subespaço vetorial do seu domínio, e a imagem é um subespaço do contradomínio, de onde podemos determinar suas dimensões. Um resultado bastante forte da Álgebra Linear, o qual será enunciado e demonstrado a seguir, relaciona as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação linear.

Teorema do Núcleo e da Imagem: Seja $T: E \rightarrow F$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Se $N(T)$ e $Im(T)$ denotam o núcleo e a imagem de T , respectivamente, então vale $\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim E$.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponha, inicialmente, que $N(T)$ não seja trivial e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma sua base. Como $N(T)$ é um subespaço vetorial de E , podemos acrescentar a B alguns vetores $w_1, w_2, \dots, w_m$ de modo a formar uma base $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$.

Nestes termos, temos $\dim N(T) = n$ e $\dim E = m + n$. De modo a demonstrar a igualdade do teorema, basta verificar que $\dim \text{Im}(T) = m$, ou seja, mostrar que há uma base de $\text{Im}(T)$ com exatamente m elementos. Para tal, provaremos que $B' = \{T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_m)\}$ é uma base para $\text{Im}(T)$, ou seja, mostraremos que B' é (1) linearmente independente e (2) gera a imagem de T .

(1) Sabemos que um conjunto B' é linearmente independente quando a única combinação linear possível de seus elementos resultando em zero é a trivial. Considere, então, a equação $a_1 T(w_1) + a_2 T(w_2) + \dots + a_n T(w_m) = 0$, nas incógnitas $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Pela linearidade de T , a equação é equivalente a

$T(a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m) = 0$, de onde concluímos que $a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m$ é um elemento do núcleo de T . Uma vez que B é uma base para $N(T)$, há números reais $b_1, b_2, \dots, b_n$ para os quais $a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$ ou, equivalentemente,

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n - a_1 w_1 - a_2 w_2 - \dots - a_m w_m = 0.$$

Porém, uma vez que $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ é uma base para E , logo linearmente independente, temos que $b_1 = b_2 = \dots = b_n = -a_1 = -a_2 = \dots = -a_m = 0$, ou seja, $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$, como desejado.

(2) Agora vejamos que B' gera $\text{Im}(T)$. Considere, então, $w \in \text{Im}(T)$. Pela definição de imagem, existe $v \in E$ tal que $w = T(v)$. Mas $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ é uma base para E , logo podemos encontrar números reais $b_1, b_2, \dots, b_n, a_1, a_2, \dots, a_m$ para os quais $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m$. Assim, teremos

$$\begin{aligned} w &= T(v) = \\ &= T(b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_m w_m) = \\ &= b_1 T(v_1) + b_2 T(v_2) + \dots + b_n T(v_n) + a_1 T(w_1) + \dots + a_m T(w_m). \end{aligned}$$

Sendo $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base para o núcleo de T , vale $T(v_1) = T(v_2) = \dots = T(v_n) = 0$, logo concluímos que $w = a_1 T(w_1) + \dots + a_m T(w_m)$, ou seja, qualquer elemento $w \in \text{Im}(T)$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $B' = \{T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_m)\}$.

Assim, B' é linearmente independente e gera $\text{Im}(T)$, o que conclui a demonstração para o caso de T não ser injetiva. Se $N(T) = \{0\}$, o resultado pode ser provado analogamente como consequência do fato de que aplicações lineares injetivas transformam conjuntos linearmente independentes em conjuntos linearmente independentes, daí uma base de E será transformada em base de $\text{Im}(T)$.

EXEMPLO 1

Considere a aplicação $\varphi: M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ dada por $\varphi(X) = X^t$. Como a transposição de matrizes é uma transformação linear, podemos estudar o núcleo de φ . Veja:

$$X \in N(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(X) = 0 \Leftrightarrow X^t = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

Assim φ é injetiva, pois seu núcleo é trivial, tendo dimensão zero. Pelo teorema do núcleo e da imagem, escrevemos $\dim N(\varphi) + \dim \text{Im}(\varphi) = \dim M_{2 \times 2}$, de onde obtemos $0 + \dim \text{Im}(\varphi) = 4$, isto é, a dimensão da imagem de φ é 4, que é a mesma do contradomínio. Assim, concluímos que a aplicação φ é, também, sobrejetiva.

Alternativamente, poderíamos verificar que a aplicação do exemplo é um isomorfismo pela associação com matrizes. Usando a base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e escrevendo as matrizes de $M_{2 \times 2}$ como vetores-coluna, poderíamos fazer

$$\varphi(X) = A.X, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_B. \text{ A verificação de que } A$$

possui inversa, neste caso, é simples, mas nem sempre isso ocorre.

EXEMPLO 2

Mostre que, se $\dim E = n$, então o núcleo de qualquer funcional linear sobre E terá dimensão n ou $n-1$.

SOLUÇÃO:

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim N(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim E.$$

Ou seja, $\dim N(f) = n - \dim \text{Im}(f)$. Sabemos que um funcional linear sobre E é uma aplicação linear $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Uma vez que $\text{Im } f$ é um subespaço de $\mathbb{R}$, temos que $\dim \text{Im } f = 0$ ou $\dim \text{Im } f = 1$, concluímos que $\dim N(f) = n - 0 = n$ ou $\dim N(f) = n - 1$, como desejado.

O resultado do exemplo anterior pode ser concluído para qualquer transformação linear cujo contradomínio possua dimensão 1.

EXEMPLO 3

Mostre que um operador linear sobre o espaço vetorial E , de dimensão finita, é injetivo se, e somente se, for sobrejetivo.

SOLUÇÃO:

Sejam $T : E \rightarrow E$ um operador linear. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, vale $\dim N(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim E$. Se T for injetivo, temos $\dim N(T) = 0$ e, assim, $\dim \text{Im}(T) = \dim E$, e como $\text{Im}(T)$ é um subespaço de E , concluímos que $\text{Im}(T) = E$ e, assim, o operador é sobrejetivo. Reciprocamente, se T for sobrejetivo, vale $\dim \text{Im}(T) = \dim E$ e obtemos $\dim N(T) = 0$, isto é, T é injetivo.

O resultado obtido no exemplo anterior continua valendo para qualquer transformação linear entre espaços vetoriais de mesma dimensão. Assim, para testar se uma transformação linear entre espaços de mesma dimensão finita é um isomorfismo, basta testar sua injetividade (em geral mais simples) ou sua sobrejetividade.

AULA 6

Autovalores e autovetores

Olá aluno(a),

Nas últimas aulas, estudamos as transformações lineares entre espaços vetoriais e algumas de suas principais propriedades, como a possibilidade de expressá-las como produto matricial.

Para encerrar o nosso curso de Álgebra Linear, nesta sexta aula, estudaremos os autovalores de um operador linear e seus autovetores associados, objetos matemáticos de extrema importância na teoria das formas quadráticas e das equações diferenciais, dentre outras áreas.

No que segue, faremos uso dos resultados obtidos anteriormente, portanto consultas às aulas passadas e outras fontes de pesquisa devem estar sempre presentes.

Objetivos

- Dar prosseguimento ao estudo das transformações lineares
- Apresentar o conceito de autovetores e autovalores

TÓPICO 1

Autovetores e autovalores

OBJETIVOS

- Definir e exemplificar os conceitos de autovalor e autovetor de um operador
- Apresentar o autoespaço associado a cada número real

Na quarta aula de nosso curso, aprendemos que uma aplicação entre espaços vetoriais é linear quando comuta com as operações de soma e de produto por escalar dos espaços, isto é, dizemos que $T : E \rightarrow F$ é uma transformação linear quando $T(u + v) = T(u) + T(v)$ e $T(k \cdot v) = k \cdot T(v)$, para quaisquer $u, v \in E$ e $k \in \mathbb{R}$. Quando $E = F$, dizemos especificamente que a função linear é um *operador linear*.

Vimos também que toda transformação linear pode ser expressa como produto matricial, através da escolha de uma base do domínio a matriz associada a um operador linear traz consigo informações sobre a injetividade e a sobrejetividade, de modo que o fato de seu determinante ser diferente de zero é uma condição suficiente (e necessária) para que o operador seja um isomorfismo e, portanto, possua inversa.

EXEMPLO 1A

A função $f : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ dada por $f(X) = X^t$ é linear e tem domínio e contradomínio iguais. Assim, podemos dizer que é f um operador linear. Além



SAIBA MAIS!

Revise o conteúdo de operador linear no site http://www.ufjf.br/luis_crocco/files/2011/09/operador_ortogonal_notas.pdf

disso, se usarmos a base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, pela identificação

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_B, \text{ obteremos a expressão } f \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_B. \text{ Fazendo}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_B, \text{ podemos escrever } f(X) = A.X. \text{ Como } A \text{ é}$$

uma matriz com determinante não nulo, concluímos também que f é um isomorfismo.

EXEMPLO 1B

Utilizando a base canônica de $\mathbb{R}^2$, o operador dado por $h(x, y) = (3x, 3y)$ tem matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e, assim, é um isomorfismo. Podemos escrevê-lo também da

forma $h(v) = 3.v$, para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$.

Dado um operador linear sobre o espaço vetorial E , consideraremos os elementos de E que são transformados em um de seus múltiplos. Mais precisamente, temos a seguinte definição:



ATENÇÃO!

Como neste texto o corpo dos escalares é o conjunto dos números reais, aqui trataremos apenas dos autovalores reais de um operador linear.

Definição: Dado o operador linear $T: E \rightarrow E$, dizemos que o elemento $v \neq 0$ é um *autovetor* de T se existir um número real λ para o qual $T(v) = \lambda.v$. O número λ é chamado de *autovalor* associado ao autovetor v .

Os autovetores de um operador também podem ser chamados de *vetores próprios* ou *vetores característicos*, analogamente os autovalores podem ser chamados de *valores próprios* ou *valores característicos*.

EXEMPLO 2A

Para o operador $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $h(x, y) = (4x - 2y, x + y)$, vale $h(2, 1) = (4 \cdot 2 - 2 \cdot 1, 2 + 1) = (6, 3) = 3 \cdot (2, 1)$. Assim, fazendo $v = (2, 1)$, obtivemos $h(v) = 3 \cdot v$ e podemos dizer que $(1, 2)$ é um autovetor para o operador h , com $\lambda = 3$ seu autovalor associado.

EXEMPLO 2B

Para o operador identidade $f(X) = X$, todo elemento é autovetor, associado ao autovalor $\lambda = 1$.

EXEMPLO 2C

Dado o operador não injetivo $T: E \rightarrow E$, se $v \in N(T), v \neq 0$, então $T(v) = 0 = 0 \cdot v$. Assim todo elemento não-nulo do núcleo é um autovetor com autovalor associado $\lambda = 0$.

EXEMPLO 2D

O operador $T: P_1 \rightarrow P_1$ dado por $T(ax + b) = -a$ possui apenas o número real 0 como autovalor, com autovetores associados sendo os polinômios constantes.

Vale ressaltar que, na definição de autovetor, está excluído o vetor nulo. Uma justificativa para isso é que $T(0) = \lambda \cdot 0$ para qualquer número real λ . Dessa forma perderíamos a unicidade do autovalor associado a cada autovetor, de acordo com o que segue.

Proposição: O autovalor associado a cada autovetor de um operador linear é único.

Demonstração: Seja $T: E \rightarrow E$ e v um autovetor de T associado aos autovalores λ e μ , isto é, que valham as igualdades $T(v) = \lambda \cdot v$ e $T(v) = \mu \cdot v$. Logo $\lambda \cdot v = \mu \cdot v$, de onde concluímos $(\lambda - \mu) \cdot v = 0$ e como $v \neq 0$ devemos ter $\lambda - \mu = 0$ e, assim, para cada autovetor de um operador linear, temos exatamente um autovalor associado.

Dado um operador linear e para cada número real λ , podemos reunir todos os eventuais autovetores associados a λ em um conjunto, o qual, unido ao vetor nulo, formará um espaço vetorial, de acordo com o que segue.

Definição: Dado o operador $T : E \rightarrow E$, para cada número real λ , o *autoespaço associado a λ* é o conjunto $A_\lambda(T) = \{v \in E; T(v) = \lambda.v\}$, que contém os autovetores de T associados ao autovalor λ e o vetor nulo de E .

EXEMPLO 3A

Considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, 2x)$. Vejamos quais os autoespaços associados aos números 1 e 2, por exemplo.

$A_1(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; T(x, y) = (x, y)\}$, mas vale

$$\begin{aligned} T(x, y) = (x, y) &\Leftrightarrow (x + y, 2x) = (x, y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x \\ 2x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

De modo que, assim, $A_1(T) = \{(0, 0)\}$.

Com isso obtemos que $\lambda = 1$ não possui nenhum autovetor associado e, portanto, não é um autovalor do operador.

Agora para $\lambda = 2$:

$A_2(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; T(x, y) = 2.(x, y)\}$, mas vale

$$\begin{aligned} T(x, y) = 2.(x, y) &\Leftrightarrow (x + y, 2x) = (2x, 2y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2x \\ 2x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

Assim, todos os pares com coordenadas iguais estão em $A_2(T)$, de onde podemos concluir que há uma quantidade infinita de autovetores associados ao 2. Podemos escrever $A_2(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$. Por exemplo, $(3, 3)$ e $(-1, -1)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$.

EXEMPLO 3B

Para qualquer operador linear $T : E \rightarrow E$, vale $A_0(T) = \{v \in E; T(v) = 0.v = 0\} = N(T)$.

No próximo tópico, veremos como determinar explicitamente os autovalores de um operador linear. Para encerrar este, ficamos com uma proposição que justifica o nome dado ao conjunto $A_\lambda(T)$.

Proposição: Dados o operador $T: E \rightarrow E$ e o número real λ , o conjunto $A_\lambda(T)$ é um subespaço vetorial de E .

Demonstração: Para mostrarmos que um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço vetorial, devemos apenas verificar que ele é não vazio (possui pelo menos o elemento neutro), que é fechado para a soma e que é fechado para o produto por escalares. Inicialmente, observe que, fixado o número real λ , vale $0 \in A_\lambda(T)$, pois $T(0) = 0 = \lambda \cdot 0$. Agora considere $v, w \in A_\lambda(T)$, ou seja, valem $T(v) = \lambda \cdot v$ e $T(w) = \lambda \cdot w$. Pela linearidade do operador, podemos fazer $T(v + w) = T(v) + T(w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w = \lambda \cdot (v + w)$, logo $v + w \in A_\lambda(T)$. Por fim, para qualquer número real k , temos que, se $v \in A_\lambda(T)$, então $T(k \cdot v) = k \cdot T(v) = k \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot (k \cdot v)$, ou seja, $k \cdot v \in A_\lambda(T)$, que completa a demonstração.

TÓPICO 2

O polinômio característico

OBJETIVOS

- Conhecer a definição do polinômio característico
- Verificar como o polinômio característico pode ser usado na determinação dos autovalores de um operador

Neste tópico, investigaremos a existência de autovalores para um operador linear, fazendo uso de sua forma matricial. Para tanto, analisaremos a existência de soluções de sistemas lineares através do cálculo de um determinante. Para que fiquem bem firmados os conhecimentos discutidos a seguir, sugere-se uma revisão da discussão de sistemas lineares, na disciplina de Fundamentos de Álgebra, bem como nos conhecimentos adquiridos em outras fontes para justificar os passos a seguir. Começaremos com um exemplo e, em seguida, generalizaremos a técnica.

EXEMPLO 1

Determine todos os autovalores do operador sobre $\mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + y, 6x)$.

SOLUÇÃO:

Queremos aqui determinar que para valores de λ existe um vetor não nulo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = \lambda(x, y)$, isto é, $(x + y, 6x) = (\lambda x, \lambda y)$. Assim temos o sistema:
$$\begin{cases} x + y = \lambda x \\ 6x = \lambda y \end{cases}$$

que é equivalente a
$$\begin{cases} (1 - \lambda)x + y = 0 \\ 6x - \lambda y = 0 \end{cases}$$
, que é um sistema homogêneo nas incógnitas x

e y e queremos que haja soluções além da trivial. Apelando para forma matricial do

sistema, temos $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e, de modo a que o sistema tenha infinitas soluções, exigimos que $\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$, ou seja, $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, que possui solução $\lambda = -2$

ou $\lambda = 3$. Para todos os outros valores de λ , o sistema admite apenas a solução trivial e, consequentemente, não há autovetores associados. Dessa forma, os únicos autovalores do operador T são $\lambda = -2$ e $\lambda = 3$.

Indo além, podemos também determinar os autoespaços associados aos autovalores determinados. Substituindo $\lambda = -2$ no sistema acima, temos $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$

, mas, como a segunda equação é obtida multiplicando a primeira por 2, o sistema é equivalente apenas à equação $3x + y = 0$. Dessa forma, $A_{-2}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x + y = 0\}$.

Agora para $\lambda = 3$ no sistema acima, temos $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$, mas, como a segunda

equação é obtida multiplicando a primeira por -3 , o sistema é equivalente apenas à equação $-2x + y = 0$. Dessa forma, $A_3(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 2x\}$.

Passemos ao caso geral. Considere o espaço vetorial E , de dimensão finita, digamos $\dim E = n$, e o operador $T: E \rightarrow E$. Escolhamos uma base de E e escrevamos os seus elementos como matrizes-coluna $n \times 1$ (como descrito na quinta aula), escrevendo então $T(X) = A.X$ para uma matriz especificada A , de ordem $n \times n$. Queremos determinar para que valores de λ a equação $T(X) = \lambda.X$ possui solução não trivial, mas isto é equivalente a $A.X = \lambda.X$, ou ainda $A.X - \lambda.X = 0$. De modo a colocar a matriz X “em evidência”, podemos escrever $\lambda.X = \lambda.I.X$. Assim:

$$\begin{aligned} A.X - \lambda.X = 0 &\Leftrightarrow A.X - \lambda.IX = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda.I).X = 0. \end{aligned}$$

A última equação é homogênea e admitirá solução diferente da trivial apenas quando a matriz $A - \lambda.I$ não possuir inversa, isto é, quando $\det(A - \lambda.I) = 0$. Com isso, podemos enunciar a seguinte afirmação.

Proposição: O número λ é um autovalor para o operador T se, e somente, $\det(A - \lambda.I) = 0$, quando A é uma matriz de T em relação a uma base de E .

Assim, encontrar os autovetores é o mesmo que resolver a equação $\det(A - \lambda.I) = 0$. Pelas operações envolvidas em um determinante, temos que a equação dada é polinomial, o que motiva a seguinte definição.

Definição: Dado o operador linear $T: E \rightarrow E$, cuja matriz em relação à base B é A , o polinômio $p_T(t) = \det(A - t.I)$ é o *polinômio característico* do operador A . Podemos também dizer que $p_T(t)$ é o polinômio característico de A , escrevendo $p_A(t)$.

EXEMPLO 2A

Para a base canônica de $\mathbb{R}^2$, o operador $T(x, y) = (x + y, 6x)$ tem polinômio característico $p_T(t) = t^2 - t - 6$.

EXEMPLO 2B

A matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ possui polinômio característico

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det(A - t.I) = \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{bmatrix} 6-t & -3 \\ 2 & 1-t \end{bmatrix} = (6-t)(1-t) + 6 = \\ &= t^2 - 7t + 12. \end{aligned}$$

Dessa forma, os autovalores de um operador linear, cuja matriz associada a alguma de suas bases é A , terá autovalores iguais às raízes de $p_A(t) = 0$, ou seja, são os valores $\lambda = 3$ e $\lambda = 4$.

EXEMPLO 2C

O operador $T: P_1 \rightarrow P_1$ dado por $T(ax + b) = -a$ tem, em relação à base $\{x, 1\}$,

a forma matricial $T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, assim seus autovalores serão raízes do

polinômio característico $p_T(t) = \det(A - t.I)$, no qual $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Fazendo as

contas, obtemos $p_T(t) = t^2$, cuja única raiz real é o 0 e, assim, o operador T possui apenas o autoespaço $A_0(T) = N(T)$ não trivial.

EXEMPLO 2D

Para a base canônica de $\mathbb{R}^2$, o operador $T(x, y) = (2x - 7y, x - 3y)$ tem polinômio característico $p_T(t) = t^2 + t + 1$, que não possui raízes reais, de onde podemos concluir que T não possui autovalores reais e, assim, $A_\lambda(T) = \{0\}$, para todo número real λ .

Como a propriedade de ser autovalor de um operador independe da base que escolhemos para representar os elementos, o polinômio característico de um operador será o mesmo, seja qual for a base escolhida para representá-lo.

Definição: Dado o operador linear $T: E \rightarrow E$, com polinômio característico $p_T(t)$, damos o nome de *espectro de T* ao conjunto $\text{Spec}(T) = \{\lambda; p_T(\lambda) = 0\}$, isto é, o conjunto de autovalores do operador T . Analogamente, podemos definir o espectro de uma matriz como conjunto de raízes de seu polinômio característico.

EXEMPLO 3A

Como $\dim P_2 = 3$, o polinômio característico de um operador $f: P_2 \rightarrow P_2$ terá grau 3, mas todo polinômio de grau ímpar e coeficientes reais possui pelo menos uma raiz real, de onde podemos concluir que o espectro de f contém pelo menos um número real e, assim, há pelo menos um autovalor para o operador.

EXEMPLO 3B

Considere o operador $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (4x - 5y, 2x - 3y)$. Em relação à base canônica, podemos escrever $F(X) = A.X$, para $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Daí

$$p_F(t) = \det(A - t.I) = \det \begin{bmatrix} 4-t & -5 \\ 2 & -3-t \end{bmatrix} = t^2 - t - 2.$$

Assim, os autovalores são as raízes de $t^2 - t - 2 = 0$, ou seja, os valores $\lambda = 2$ e $\lambda = -1$, e podemos escrever $\text{Spec}(F) = \{2, -1\}$.

Para $\lambda = 2$, os autovetores satisfazem $(4x - 5y, 2x - 3y) = 2(x, y)$, que resulta na equação $2x - 5y = 0$, isto é, $A_2(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - 5y = 0\}$, por exemplo $(5, 2) \in A_2(F)$.

Para $\lambda = -1$, os autovetores satisfazem $(4x - 5y, 2x - 3y) = -(x, y)$, que resulta na equação $x - y = 0$, isto é, $A_{-1}(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$, por exemplo $(3, 3) \in A_{-1}(F)$.

EXEMPLO 3C

Considere o operador $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado pela lei $H(x, y, z) = (2x + y + z, 2x + 3y + 4z, -x - y - 2z)$. A matriz de H em relação à base

canônica de $\mathbb{R}^3$ é $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Assim, o polinômio característico pode ser

encontrado por

$$\begin{aligned} p(t) &= \det(A - t.I) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 2 & 3-t & 4 \\ -1 & -1 & -2-t \end{bmatrix} = \\ &= (2-t)(3-t)(-2-t) - 4 - 2 + (3-t) + 4(2-t) - 2(-2-t) = \\ &= (6 - 5t + t^2)(-2-t) - 6 + 3 - t + 8 - 4t + 4 + 2t = \\ &= -12 - 6t + 10t + 5t^2 - 2t^2 - t^3 - 3t + 9 = \\ &= -3 + t + 3t^2 - t^3. \end{aligned}$$

Como a soma dos coeficientes de $p(t)$ é nula, temos que $p(1) = 0$. Fazendo então a divisão de $p(t)$ por $t - 1$, obtemos a fatoração $p(t) = (1-t)(t^2 - 2t - 3)$. Assim, as outras raízes de $p(t)$ são $t = -1$ e $t = 3$, daí $\text{Spec}(G) = \{-1, 1, 3\}$.

EXEMPLO 3D

Considere o operador $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $G(x, y, z) = (3x, 2y, 4z)$. Escrevendo os elementos de $\mathbb{R}^3$ como vetores coluna, escrevemos $G(X) = A.X$ e, calculando a partir daí o polinômio característico, obtemos $p_G(t) = (3-t).(2-t).(4-t)$. Dessa forma, os autovalores de G são as raízes de $p(t)$, de modo que podemos escrever $\text{Spec}(G) = \{2, 3, 4\}$.

O polinômio característico, como visto, é uma ferramenta de grande utilidade na determinação dos autovalores de um operador linear. No próximo tópico, veremos como poderemos, sob certas condições, encontrar uma base em relação a qual a matriz de um operador é uma matriz diagonal.

TÓPICO 3

Diagonalização de operadores

OBJETIVO

- Verificar critérios segundo os quais um operador é diagonalizável

Neste tópico, estudaremos meios para encontrar uma base de um espaço vetorial em relação a qual a matriz de um operador é a mais simples possível. Especificamente queremos que o operador seja associado a uma matriz diagonal (aquela na qual os elementos fora da diagonal são todos iguais a 0).

EXEMPLO 1

Dado o operador $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz associada à base canônica é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. O polinômio característico de f é, portanto, $p(t) = t^2 + 3t - 10$,

assim os autovalores $\text{Spec}(f) = \{-5, 2\}$. Associado ao autovalor 2, temos, por exemplo, o autovetor $u = (2, 1)$, de modo que podemos escrever $f(u) = 2u$. Associado ao autovalor -5 , temos o autovetor $v = (1, -3)$. Dessa forma, podemos escrever $f(v) = -5v$. É fácil verificar que $B = \{u, v\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Considere, então $w \in \mathbb{R}^2$, escrevendo $w = \alpha.u + \beta.v$ para números reais convenientes α, β e, usando a linearidade de f , obtemos

$$\begin{aligned} f(w) &= f(\alpha.u + \beta.v) = \alpha.f(u) + \beta.f(v) = \alpha.2u + \beta.(-5)v = \\ &= 2\alpha.u - 5\beta.v \end{aligned}$$

Logo

$$f \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -5\beta \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_B, \text{ isto é, em relação à base } B = \{(2,1), (1,-3)\},$$

a matriz do operador f é $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, que é uma matriz diagonal.

Pelo que ilustra o exemplo anterior, se conseguirmos uma base do domínio de um operador linear formada apenas por autovetores, a matriz do operador em relação a esta base será diagonal e, além disso, a diagonal será formada pelos autovalores do operador. A seguir, a demonstração para este fato:

Proposição: Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ for uma base do espaço vetorial E formada por autovetores do operador $T : E \rightarrow E$, então a matriz de T em relação a B será diagonal.

DEMONSTRAÇÃO:

Se $v_1, \dots, v_n$ são autovetores de T , então existem números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ para os quais $T(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Como, além disso, B é uma base, dado qualquer $v \in E$, podemos escrever $v = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n$ e, usando a linearidade do operador, obtemos:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n) = \\ &= a_1 \cdot T(v_1) + a_2 \cdot T(v_2) + \dots + a_n \cdot T(v_n) = \\ &= a_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot \lambda_n \cdot v_n = \\ &= \lambda_1 \cdot (a_1 \cdot v_1) + \lambda_2 \cdot (a_2 \cdot v_2) + \dots + \lambda_n \cdot (a_n \cdot v_n). \end{aligned}$$

O que, na forma matricial, é equivalente a:

$$T \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot a_1 \\ \lambda_2 \cdot a_2 \\ \dots \\ \lambda_n \cdot a_n \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}_B, \text{ ou seja, podemos escrever}$$

$T(X) = A \cdot X$, em que A é uma matriz diagonal. Mais precisamente, os elementos da diagonal são os autovalores do operador dado.

Definição: Dizemos que o operador $T : E \rightarrow E$ é *diagonalizável* quando existir uma base do domínio em relação à qual a matriz de T seja diagonal.

EXEMPLO 2

O operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz associada à base canônica é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

Dada a proposição acima, para que verifiquemos se um operador é diagonalizável, é suficiente verificar a existência de uma base do domínio formada apenas por autovetores. Equivalentemente se $\dim E = n$, o operador $T : E \rightarrow E$ será diagonalizável se, e somente se, houver n autovetores de T que sejam linearmente independentes.

Com isso, encerramos o nosso curso básico de Álgebra Linear. Esperamos que tenha sido produtivo e que os conhecimentos adquiridos aqui sejam aprofundados nas suas pesquisas e utilizado em cadeiras futuras.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. **Álgebra linear contemporânea**. Tradução Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2006.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Tradução Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOLDRINI, José Luiz; et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

POOLE, David. **Álgebra linear**. Tradução Martha Salerno Monteiro; et al. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

CURRÍCULO

Francisco Gêvane Muniz Cunha

Francisco Gêvane Muniz Cunha é professor efetivo do Instituto Federal do Ceará – IFCE desde 1993. Nascido em São João do Jaguaribe – CE em 1970, é técnico em informática industrial pela Escola Técnica Federal do Ceará (1993). Licenciado (1993) e bacharel (1994) em matemática pela Universidade Federal do Ceará – UFC. Possui mestrado em matemática (1997) e mestrado em ciência da computação (2002), ambos pela UFC. É doutor em engenharia de sistemas e computação (2007) pela Universidade Federal do Rio de Janeiro com tese na linha de otimização. Tem experiência na área de matemática aplicada, no ensino de matemática, na formação de professores, no uso de tecnologias e no ensino na modalidade a distância. Atualmente é professor de disciplinas de matemática dos cursos de licenciatura em matemática, engenharias e outros do IFCE. Na modalidade semi-presencial é professor conteudista e formador de disciplinas de matemática do curso licenciatura em matemática do IFCE, tendo produzido diversos livros didáticos. Orienta alunos em nível de graduação e pós-graduação em matemática, ensino de Matemática ou educação Matemática. Tem interesse no uso de ambientes informatizados e, em especial, no uso de softwares educativos como apoio para o ensino de matemática. Dentre outras atividades, gosta de ler a bíblia, ajudar as pessoas, ensinar, estudar matemática e computação e assistir corridas de fórmula 1.

Jânio Kléo Sousa Castro

Jânio Kléo começou seus estudos de Matemática em 2000, quando ingressou no bacharelado da Universidade Federal do Ceará, colando grau em julho de 2004. A partir de 2001 e por três anos, foi monitor de Cálculo Diferencial e Integral na UFC, desempenhando atividade de acompanhamento e tira-dúvidas para alunos de graduação.

Durante os anos de 2006, 2007 e 2008, foi professor da UFC, com turmas de diversos cursos, ministrando aulas de Álgebra Linear, Equações Diferenciais, Variáveis Complexas e Geometria Hiperbólica, entre outras. Desde o começo de 2009 é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, atuando nos campus de Fortaleza e Maracanaú, nos cursos presenciais e semipresenciais.

